Raconte-moi les graphes

Réalisation

Comité International des Jeux Mathématiques

Association nationale de jeunesse et d'éducation populaire
Association agrée par l'Éducation Nationale

CIJM - Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 PARIS Cedex 05

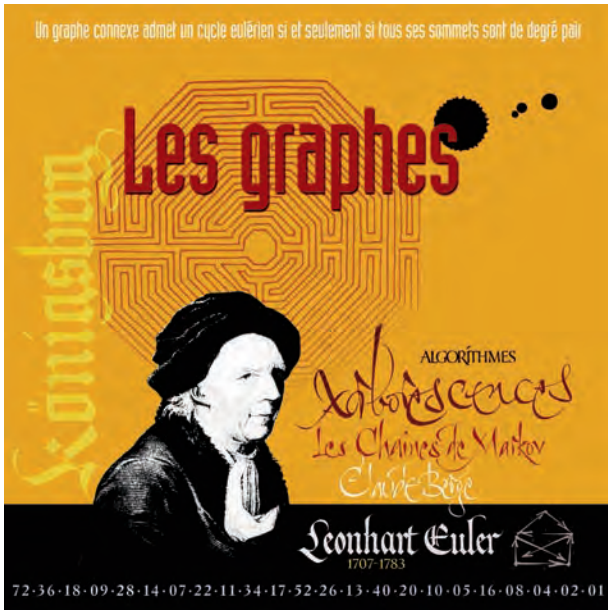
Mail : cijm@cijm.org

N° SIRET : 433 879 343 00047 APE 927 C

www.cijm.org

Livret d'accompagnement

réalisé sous la direction de
Marie José Pestel,
Présidente du CIJM
et
Abdelkader Necer,
Maître de conférences
Université de Limoges



Raconte-moi les graphes

Annexe Historique

Parce qu'il est rare qu'une théorie mathématique naisse d'une situation aussi ludique, compréhensible de tous et que les méthodes de résolution proposées soient aussi facilement abordables, son étude est extrêmement motivante.

On considère souvent les travaux d'Euler sur « *le jeu des 7 ponts et des iles* » et son fameux mémoire comme l'acte de naissance de la théorie des graphes.
Pourtant Euler lui même dans son Mémoire parle de Leibnitz et de la *Géométria situs* qui s'occupe uniquement de l'ordre et de la situation, indépendamment des rapports de grandeur.
Dans une brochure IREM de Clermont Ferrand, parue en Juin 2004, on trouve le texte qu'Euler proposa pour résoudre le problème des ponts de Koenigsberg.
L'étude de ce texte, l'analyse du vocabulaire, les méthodes de démonstration sont très riches d'enseignement...

Plus de cent ans plus tard, quand le mathématicien William Rowan Hamilton énonça le *« jeu icosédien»*, qui devrait plutôt s'appeler « dodécaédien » puisqu'il s'agit de parcourir un dodécaèdre en visitant tous ses sommets une fois et une seule, il proposait au monde mathématique un problème apparemment proche de celui d'Euler, les sommets remplaçant simplement les arêtes, mais bien plus difficile puisque sa solution générale n'est pas encore connue.
Dans la version du problème hamiltonien, les sommets sont désignés par des villes dont la première lettre est une consonne , une consonne par ville, 20 consonnes comme 20 sommets : Bruxelles, Canton, Delhi, Francfort....

En 1958, Claude Berge publie le livre *« Théorie des graphes et ses applications »* et pose ainsi les fondements d'une théoRie moderne et fructueuse. En moins de 10 ans ce livre fut traduit en anglais, russe, espagnol, roumain, chinois... Le concept de graphe existait déjà mais il n'avait jamais été formellement défini et le mérite de Claude Berge est, entre autres, d'avoir rassemblé les théorèmes épars en un unique travail et compris que la théorie des graphes pouvait être généralisé ....

ANNEXE HISTORIQUE : LE JEU DES 7 PONTS ET LE MÉMOIRE D'EULER

LE JEU DES PONTS ET DES ILES

Parmi les divers travaux des mathématiciens sur cette branche de la science de l'étendue que l'on nomme *Géométrie de situation*, on rencontre, dès l'origine, un fameux Mémoire d'Euler, connu sous le nom de Problème des Ponts de Kœnigsberg ; nous donnons, d'après les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, un commentaire de cet opuscule, qui a paru en latin dans les Mémoires de l'*Académie des sciences de Berlin* pour l'année 1759, et qui a pour titre : *Solutio problematis ad Geometriam situs pertinentis*.

LE MÉMOIRE D'EULER

1) Outre cette partie de la Géométrie qui s'occupe de la grandeur et de la mesure, et qui a été cultivée dés les temps les plus reculés, avec une grande application, Leibniz a fait mention, pour la première fois, d'une autre partie encore très inconnue actuellement, qu'il a appelée *Geometria situs*. D'après lui, cette branche de la science s'occupe uniquement de l'ordre et de la situation, indépendamment des rapports de grandeur. Mais quels sont les problèmes qui appartiennent à cette géométrie; quelles sont les méthodes qu'il faut employer à leur résolution ? C'est ce qui n'a pas encore été nettement défini. Récemment j'ai entendu parler d'un problème qui paraît se rapporter à la Géométrie de situation, puisqu'il ne contient, dans son énoncé, que des considérations d'ordre et non de mesure; aussi ai-je résolu d'exposer ici,comme un spécimen, la méthode que j'ai trouvée pour résoudre ce problème.

2) A Kœnigsberg, en Poméranie, il y a une île appelée Kneiphof ; le fleuve qui l'entoure se divise en deux bras sur les quels sont jetés les sept ponts a, b, c, d, e, f, g.

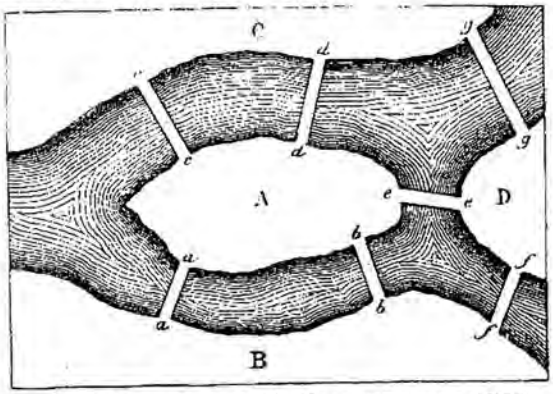


Fig I. Les ponts de Koenigsberg en 1759.

Cela posé, peut-on arranger son parcours de telle sorte que l'on passe sur chaque pont, et que l'on ne puisse y passer qu'une seule fois ? Cela semble possible, disent les uns ; impossible, disent les autres; cependant personne n'a la certitude de son sentiment. Je me suis donc proposé le problème suivant, qui est très général:

Quelle que soit la forme d'un fleuve, sa distribution en bras, par des îles en nombre quelconque, et quel que soit le nombre des ponts jetés sur le fleuve, trouver si l'on peut franchir celui-ci en passant une fois, et une seule, sur chacun des ponts

3) Quant au problème particulier des sept ponts de Kœnigsberg, on pourrait évidemment le résoudre en faisant l'énumération complète de tous les parcours possibles ; on reconnaîtrait ainsi s'il existe ou non un chemin qui réponde à là question. Mais, par suite du grand nombre de permutations, cette méthode déjà difficile et laborieuse dans le cas particulier, serait impraticable pour un plus grand nombre de ponts ; d'autre part, parmi ces permutations, beaucoup d'entre elles sont inutiles, de telle

sorte qu'après avoir terminé l'opération on aurait rencontré un grand nombre de choses qui ne sont pas en question ; c'est en cela, sans aucun doute, que réside la cause d'une aussi grande difficulté. Donc, en laissant de côté ces considérations, j'ai recherché s'il n'était pas préférable d'imaginer une méthode qui permît de juger, au premier abord, de la possibilité ou de l'impossibilité du problème ; je pensais, en effet, qu'une telle méthode devait être beaucoup plus simple.

4) Or, toute la méthode repose sur une manière convenable de représenter les divers chemins ; pour cela, je me sers des lettres majuscules A, B, C, D, ... pour désigner les diverses régions séparées par les bras du fleuve; alors, si l'on passe de la région A dans la région B, soit par le pont a, soit par le pont b, je désigne ce chemin par AB; la première lettre indique la région de départ, et la seconde la région d'arrivée. Maintenant, si le voyageur passe de la région B dans la région D, par le pont f par exemple, je désigne la seconde traversée par BD, et l'ensemble des deux passages successifs par ABD ; ainsi, la lettre intermédiaire B désigne en même temps la région d'arrivée après la première traversée, et la région de départ pour la seconde.

5) Si le voyageur passe ensuite de D en C par le pont g, je désigne l'ensemble des trois passages successifs par les quatre lettres ABDC. Ainsi, la notation ABDC signifie que le voyageur, situé primitivement dans la région A, est parvenu dans la région C, après avoir occupé successivement les régions B et D, mais, puisque ces quatre régions sont séparées les unes des autres par le bras du fleuve, le voyageur a dû franchir trois ponts; de même, tout parcours dans lequel on traverse quatre ponts sera désigné par cinq lettres En général, si le voyageur traverse n ponts, la notation de son parcours contiendra n+1 lettres. Ainsi dans le problème des sept ponts de Kœnigsberg, tout chemin possible doit être désigné par huit lettres.

6) On observera que, dans cette notation, il n'est pas tenu compte de la désignation des ponts par lesquels le passage s'effectue ; il est évident, en effet, que les ponts qui réunissent les mêmes régions peuvent être, dans chaque parcours, remplacés les uns par les autres. Par conséquent, dans le problème des sept ponts, tout parcours est représenté par huit lettres; mais, de plus, ces huit lettres doivent être disposées de telle sorte que la succession immédiate des lettres A et B, dans l'ordre AB ou BA, se présente deux fois, puisqu'il y a deux ponts qui réunissent les rives des régions A et B ; de même, le voisinage des lettres A et C doit aussi apparaître deux fois ; pour la même raison, il est nécessaire que les lettres B et D, ou C et D soient voisines une seule fois.

7) Le problème particulier se réduit donc à former avec les quatre lettres A, B, C, D une série de huit lettres, dans laquelle tous ces voisinages apparaissent autant de fois qu'il a été indiqué ; mais, avant de chercher à effectuer une telle disposition, il est bon de se demander si celle-ci est réalisable. En effet, si l'on démontrait, et c'est ce qui a lieu ici, qu'un tel assemblage de lettres est impossible, il serait inutile de continuer. Aussi ai-je trouvé une règle qui donne, pour tous les cas, la condition indispensable pour que le problème des ponts et des îles ne soit pas impossible.

8) Pour cela, je considère uniquement la région A, dont la rive est réunie à celle des autres régions par un nombre quelconque de ponts a, b, c, d, e, ... En commençant par le pont a, j'observe que si le voyageur traverse ce pont, ou bien le voyageur se trouvait en A avant le passage, ou s'y trouvera après; par conséquent, en franchissant le pont a dans un sens ou dans l'autre, la lettre A paraîtra une seule fois dans la notation. Supposons maintenant que trois ponts a, b, c conduisent dans la région A ; si le voyageur traverse les trois ponts, la lettre A apparaîtra deux fois dans la notation, soit qu'au début le voyageur parte de cette région ou d'une autre quelconque. De même, si cinq ponts conduisent en A, la lettre A sera comprise trois fois dans la notation du passage à travers tous ces ponts. En général, si le nombre des ponts qui aboutissent à la rive de la région A est impair (une telle région sera appelée région impaire), la lettre A apparaîtra, dans la notation du passage complet, un nombre de fois égal à la moitié du nombre des ponts augmenté d'une unité. En d'autres termes, si le nombre des ponts est 2n+1, le nombre d'apparitions de A sera la moitié de 2n+2 ou n+1.

9) Dans le cas du problème de Kœnigsberg, cinq ponts aboutissent à la région A, et trois ponts à chacune des régions B, C, D; donc, dans la notation du parcours complet, la lettre A doit apparaître trois fois, et chacune des lettres B, C, D doit être écrite deux fois ; par conséquent cette notation devrait renfermer neuf lettres, et non huit, ainsi que nous l'avions trouvé par d'autres considérations. Ainsi le problème de franchir une seule fois tous les ponts de Kœnigsberg n'est pas possible.

10) On appliquera exactement le même raisonnement pour tous les cas dans lesquels le nombre des ponts qui aboutissent aux différentes régions est toujours impair, on pourra déterminer des cas d'impossibilité du parcours. En effet, s'il arrive que le nombre total des apparitions de toutes les lettres n'égale pas le nombre de tous les ponts augmenté de l'unité, le problème est alors impossible. On observera que la règle donnée pour obtenir le nombre des répétitions de la lettre A par le nombre impair des ponts de la région s'applique toujours, soit que tous les ponts issus de la rive A aboutissent à une seule région B, soit qu'ils aboutissent à un nombre quelconque de régions.

11) Mais, lorsque le nombre des ponts issus de A est pair, on doit considérer deux cas, suivant que le voyageur est parti de A ou d'une autre région. En effet, si deux ponts conduisent en A, et si le voyageur est parti de A, alors la lettre A doit être répétée deux fois : une première fois pour le départ par l'un des ponts, et une deuxième fois pour le retour par l'autre pont; mais si le voyageur a commencé ses pérégrinations par une autre région, la lettre A ne se trouvera écrite qu'une seule fois et désignera tout aussi bien, ainsi qu'il est convenu, l'arrivée en A par l'un des ponts et le départ par l'autre.

12) Supposons que quatre ponts conduisent dans la région A, et que le voyageur parte de celle-ci ; alors la notation du parcours contiendra trois fois la lettre A s'il passe une fois, et une seule, sur chacun de ces ponts; mais s'il est parti d'une autre région, la lettre A ne sera répétée que deux fois. De même, lorsque six ponts aboutissent à la région A, la notation du parcours renfermera quatre fois ou trois fois la lettre A, suivant que le départ s'est effectué de la région A ou d'une autre. En général, lorsque le nombre des ponts d'une rive est pair (région paire), la notation correspondante renferme la lettre de cette région un nombre de fois égal à la moitié du nombre des ponts, si le départ s'est établi d'une autre région, et à ce nombre augmenté de l'unité, si le commencement du voyage a eu lieu dans cette région.

13) Mais il est évident que, dans le parcours complet, on ne peut partir que d'une seule région; par conséquent je prendrai toujours pour le nombre des répétitions d'une lettre la moitié du nombre des ponts pour une région paire, et la moitié du nombre des ponts augmenté d'une unité, si la région est impaire. Nous aurons alors deux cas à considérer, suivant que le départ s'effectue d'une région impaire ou d'une région paire.
Dans le premier cas, le problème sera impossible si le nombre total des répétitions des lettres ne surpasse pas d'une unité le nombre total des ponts. Dans le cas de départ d'une région paire, le problème sera impossible, si le nombre total des répétitions des lettres n'égale pas le nombre des ponts; car, en commençant par une région paire, on devra augmenter d'une unité pour cette région, et pour celle-là seulement, le nombre des répétitions de la lettre correspondante.

14) Considérons donc une disposition quelconque des ponts et des îles d'un fleuve. Pour savoir si le parcours complet de tous les ponts n'est pas impossible à priori, on opère de la manière suivante :
1°) On désigne chacune des régions séparées les unes des autres par les lettres A, B, C, D ;
2°) On prend le nombre de tous les ponts, et on le place en tête du tableau de calcul que nous allons indiquer ;
3°) On écrit dans une colonne verticale chacune des lettres A, B, C, D, et dans une seconde colonne, le nombre des ponts qui aboutissent à ces différentes régions ;

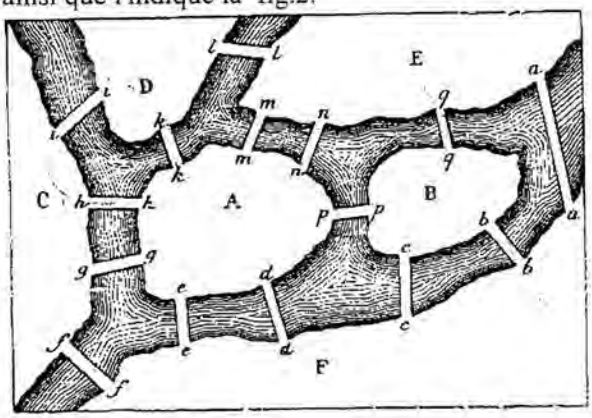
4°) On marque d'un astérisque les régions paires, c'est-à-dire celles auxquelles aboutissent des ponts en nombre pair ;
5°) On écrit dans une troisième colonne verticale les moitiés des nombres pairs, et les moitiés des nombres impairs, augmentés d'une unité, de la colonne précédente ;
6°) On fait la somme de tous les nombres de cette dernière colonne. Lorsque cette somme est égale au nombre de tous les ponts ou lui est supérieure d'une unité, le passage complet peut être effectué, sinon le problème est impossible. Mais il faut observer que, dans le premier cas, le départ doit commencer par une région paire, marquée d'un astérisque ; dans le second cas, le départ doit s'effectuer d'une région non marquée d'astérisque, ou impaire. Ainsi l'on a pour le problème de Kœnigsberg :

Nombre des ponts : 7

A	5	3
B	3	2
C	3	2
D	3	2
TOTAL	9	

Comme le total est plus grand que 8 ou 7 + 1, le problème est impossible.

15) Considérons la disposition formée par deux îles A et B, réunies entre elles et aux rives d'un fleuve par quinze ponts, ainsi que l'indique la fig.2.



On demande si l'on peut voyager de manière à passer sur tous les ponts, sans jamais repasser sur l'un d'eux. D'abord je désigne les six régions par les lettres A,B,C,D,E,F ; puis je construis le tableau d'après les explications données ci-dessus :

Nombre des ponts : 15.

A*	8	4
B*	4	2
C*	4	2
D	3	2
E	4	3
F*	6	3
TOTAL	16	

Dans cet exemple, le problème est possible, pourvu que l'on parte de la région D, et alors on arrive à la région E, ou inversement; le parcours pourra s'effectuer ainsi :

EaFbBcFdAeFfCgAhCiDkAmEnApBqEID,

ou dans l'ordre inverse ; dans cette notation, nous avons intercalé entre les lettres majuscules, qui indiquent les régions, les lettres minuscules qui désignent les quinze ponts.

16) En dehors de la méthode précédente, pour juger de l'impossibilité, nous indiquerons un moyen plus simple et plus expéditif. Nous observerons d'abord que la somme des nombres de la seconde

colonne verticale du tableau est exactement égale au double du nombre des ponts ; cela tient à ce que nous avons compté chaque pont deux fois, puisque par chacune de ses extrémités il aboutit à deux régions distinctes.

17) Il résulte évidemment de cette remarque, que la somme des nombres renfermés dans la seconde colonne verticale est un nombre pair, puisque sa moitié représente le nombre des ponts.
Par conséquent, il n'est pas possible que le nombre des régions impaires soit un, trois, cinq, etc... ; ainsi dans tous les tableaux de calcul, la seconde colonne renferme toujours un nombre pair de nombres impairs ; en d'autres termes, le nombre des régions impaires est nécessairement zéro ou un nombre pair. C'est, en particulier, ce que nous avons trouvé pour le problème de Kœnigsberg, et aussi pour le problème du n° 15•.

18) Il ressort de ces considérations que le problème n'est pas impossible si toutes les régions sont paires. Alors tous les nombres de la seconde colonne verticale sont pairs, et le total des nombres de la troisième colonne est égal au nombre des ponts ; et l'on verra que le problème est toujours possible en prenant pour point de départ une région quelconque.
Ainsi, dans l'exemple de Kœnigsberg, on pourrait franchir tous les ponts par deux fois; par exemple :

ababcdcdeffgge.

En effet, chaque pont est dédoublé, et toutes les régions deviennent paires.

19) Supposons encore qu'il y ait deux régions impaires, toutes les autres étant paires ; dans ce cas, la somme des nombres de la troisième colonne surpasse d'une unité le nombre des ponts ; on s'assurera encore que le problème est possible, à la condition de prendre pour point de départ ou d'arrivée l'une ou l'autre des deux régions impaires. On voit encore que si le nombre des régions impaires était de quatre, six, huit, la somme des nombres de la troisième colonne surpasserait de deux, trois, quatre unités le nombre total des ponts ; par conséquent le problème serait impossible.

20) En résumé, étant donnée une disposition quelconque, il sera facile de savoir s'il est possible de franchir, une seule fois, tous les ponts. Le problème est impossible, lorsqu'il y a plus de deux régions impaires; il est possible:
1°) lorsque toutes les régions sont paires, et alors le point de départ peut se faire arbitrairement d'une région quelconque ;
2°) lorsqu'il n'y a que deux régions impaires, et alors le parcours commence par l'une de celles-ci et finit par l'autre, ou inversement.

21) Lorsque l'on a conclu à la possibilité du problème, il reste à résoudre la question de savoir comment on doit diriger sa course ; à cet effet, je me sers de la règle suivante: «On supprime par la pensée, autant de fois qu'on le peut, les couples de ponts qui conduisent d'une région dans une autre ; de cette manière, le nombre des ponts est considérablement diminué ; on cherche ensuite la course à effectuer avec le reste des ponts. Cela fait, on rétablit les ponts supprimés, ce qui devient très facile avec un peu d'attention. Aussi je ne crois pas qu'il soit nécessaire d'en dire davantage sur la loi de formation des parcours.»

Ici se termine le Mémoire d'Euler. Cet illustre géomètre n'a traité pour ainsi dire que la question d'impossibilité. On trouvera dans la Note II, la théorie de la possibilité, que l'on doit considérer comme la suite du Mémoire qui précède.

NOTE II. *Sur le jeu des ponts et des îles.*

Nous avons vu que le jeu des ponts se ramène à la description par un ou plusieurs traits continus, sans répétition, de toutes les figures formées de lignes droites ou courbes, dans le plan ou dans l'espace. Cette étude se résume dans les deux théorèmes suivants :

THEOREME I. *Dans tout réseau géométrique formé de lignes droites ou courbes, le nombre des points impairs est toujours zéro ou un nombre pair.*

Ce théorème se trouve complètement démontré dans le mémoire d'Euler.
On peut encore donnera la démonstration la forme suivante : Désignons par A, B, C, D, ..., les diverses stations du réseau, les divers points d'embranchement, les têtes de ligne; soient P et Q deux stations voisines, c'est-à-dire telles que l'on puisse aller de P en Q par un ou plusieurs chemins, sans rencontrer d'autres stations du réseau. Si l'on supprime l'un de ces chemins PQ, le nombre des chemins qui aboutissent en P et en Q diminue d'une unité et change de parité. Par conséquent, si P et Q sont des points impairs, ils deviennent pairs par cette suppression ; si P et Q sont pairs, ils deviennent impairs; enfin si P et Q sont de parité différente, ils demeurent de parité différente. Donc la parité du nombre des points impairs ne change pas par cette suppression. Par suite, en supprimant successivement tous les chemins qui unissent deux stations voisines, jusqu'à ce qu'il n'en reste aucun, le nombre des points impairs est nul ; ce nombre était donc zéro ou un nombre pair, avant la suppression.

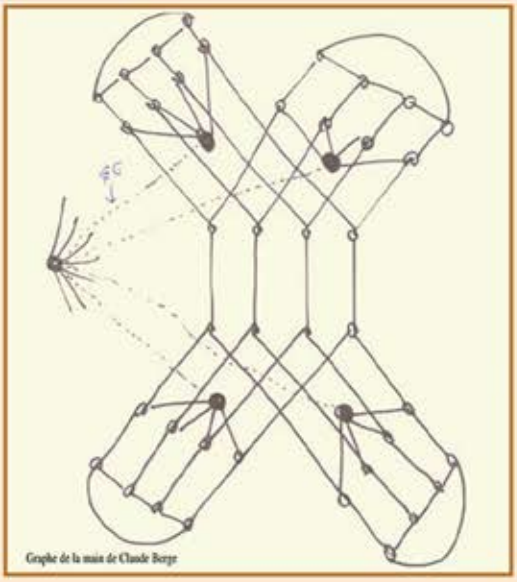
Remarque : Ce théorème s'applique aux canevas géodésiques. Dans une chaîne de triangles, il y a toujours un nombre pair de sommets où aboutissent, en nombre impair, des angles réduits à l'horizon, tandis que le nombre des sommets où aboutissent des triangles en nombre pair peut être pair ou impair.

THEOREME II. *Tout réseau géométrique qui contient 2n points impairs peut être décrit par un nombre minimum de n traits sans répétition. Tout réseau géométrique, qui ne contient que des points pairs, peut être décrit par un seul trait sans répétition.*

On suppose que le réseau est continu, c'est-à-dire que l'on peut aller d'un point quelconque du réseau à un autre par un chemin continu D'ailleurs, dans le cas de plusieurs réseaux séparés, il suffit d'appliquer à chacun d'eux les théorèmes précédents. Cela posé, si l'on part d'un point impair A et si l'on chemine au hasard, sans repasser sur la même voie, on sera forcé de s'arrêter à un certain moment ; en observant que dans cette marche on ne change point la parité des stations que l'on traverse, on en conclura que le point d'arrêt est un point impair B. En supprimant le parcours AB, on obtient ainsi une figure qui ne possède plus que (2n - 2) points impairs.
Après n parcours analogues, il ne restera donc qu'un réseau dont les stations sont d'ordre pair.
Maintenant, si l'on part d'un point quelconque M du réseau restreint, et si l'on chemine au hasard, on ne se trouvera arrêté qu'en revenant au point de départ M, après avoir décrit une courbe fermée. Après avoir décrit un certain nombre de boucles semblables, on aura parcouru tout le réseau. Mais, puisque le réseau est continu, ces boucles peuvent venir se souder soit les unes sur les autres, puis sur les n chemins qui ont été décrits primitivement. Par suite, le réseau peut être décrit en n traits continus au plus.

Remarque : Une figure dont tous les points sont pairs peut être considérée, de plusieurs façons, comme une seule courbe fermée. Cette observation trouve son emploi dans la théorie des courbes unicursales.

Claude Berge


Graphe de la main de Claude Berge

Un mathématicien atypique

Comme de nombreux mathématiciens, Claude Berge ne pense pas dans sa jeunesse être destiné aux mathématiques. Lors de ses études, il s'intéresse surtout à la littérature. Cependant, son goût pour les raisonnements logiques ainsi que la rencontre d'un professeur de «taupe» passionnant changeront sa destinée. Après une thèse de mathématiques classiques, il se lance dans un domaine alors très peu développé en France qui prendra plus tard le nom de Combinatoire.

Son besoin de rendre les choses visuelles, de les agencer et de trouver des raccourcis l'amène à s'intéresser plus particulièrement à des articles publiés en Europe traitant des graphes. Il en fait alors une synthèse afin d'approfondir ce sujet qui lui semble plein de ressources. Ainsi naîtra en France, en 1958, la première étude complète dédiée aux graphes : *Théorie des graphes et ses applications*.

Spécialisé dans ce domaine, il publie une série d'articles de référence notamment *Graphes Parfaits* en 1963, ainsi qu'un livre *Graphes et Hypergraphes* en 1969. C'est à cette occasion que Claude Berge a créé le terme *hypergraphes*. Spécialiste des jeux de stratégie, il rédige un ouvrage, *La Théorie générale des jeux à «n» personnes*, où il introduit une alternative à «l'équilibre fort» de Nash qui portera son nom. Ultérieurement, son ouvrage *Programmes, Jeux et Réseaux de Transport* unifie des notions diverses en matière de graphes. Certains mathématiciens s'occupent de nombres et de fonctions, lui se penche sur les problèmes de configuration. Les mathématiques sont pour lui avant tout une source de plaisir. Il aime trouver des chemins tout à fait inattendus dans le but de réaliser des démonstrations élégantes en écartant les formules compliquées. Plus que tout, il aimera façonner et faire évoluer cette discipline.

Amoureux de beaux énoncés, de problèmes insolubles et de démonstrations courtes, Berge préfère les conjectures aux théorèmes. Sa conjecture des «Graphes parfaits» qui lui vaut une renommée mondiale, a résisté pendant 42 ans aux efforts des plus grands mathématiciens. Elle vient cependant d'être démontrée, mais au prix d'une longue démonstration.

Claude Berge montre du doigt un vrai "trou de Graphe Parfait" dans une de ses oeuvres...

Ses recherches sont si passionnantes qu'il aura toujours du mal à les abandonner pour transmettre son savoir dans des lieux prestigieux, tant en France (Sorbonne, Université Pierre et Marie Curie,...) que dans le monde (Etats-Unis, Chine, Inde, Koweit,...). Professeur invité à Princeton, directeur de recherche au CNRS, directeur de l'Equipe combinatoire de l'université Pierre et Marie Curie (Paris VI) pendant 25 ans, chercheur à l'Ecole des hautes études en sciences sociales, chercheur au Centre d'analyse et de mathématique sociales, directeur du Centre international de calcul à Rome, consultant à l'EURATOM, ne sont que quelques unes des fonctions qu'il a occupées pendant sa vie.

Mondialement reconnu, il sera honoré de nombreux prix prestigieux parmi lesquels, conjointement avec le Professeur américain R.L.Graham, le prix Euler en 1995.

Claude Berge

L'homme de passion

Petit fils de Félix Faure, fils d'un médecin psychiatre, Claude Berge est né le 5 juin 1926 à Paris. Il est le second d'une fratrie de six enfants, au sein de laquelle il apparaît très tôt comme un garçonnet exceptionnel. Il aime s'isoler pour se consacrer à ses passions : la collection, le jeu et la mythologie grecque et romaine. Sa curiosité et son goût du voyage l'amènent à découvrir les cinq continents et plus particulièrement l'Afrique, l'Asie et l'Océanie.

Véritable humaniste, Claude Berge aime la vie, les gens et surtout les jeunes, ses étudiants, avec qui il a des liens très forts. L'homme est un tourbillon de passions qu'il aime transmettre aux autres. Son enthousiasme est contagieux, nombreux sont ceux qui l'ont suivi sur cette voie. C'est à un très haut niveau qu'il pratique le Go, le Solitaire, le Hex et les Echecs. Il joue avec les plus grands et sa maîtrise des graphes lui vaut de travailler sur la mise au point de programmes performants pour les jeux d'échecs.

Ses passions s'étendent aussi à la littérature avec le mouvement OULIPO, *OUvroir de LIttérature POtentielle*, à la sculpture et à la collection d'œuvres d'art où il recherche l'insolite et les formes épurées, avec une vraie passion pour l'art Asmat de Nouvelle Guinée.

Lui-même sculpteur de très grand talent, il laisse une œuvre importante. Partout, dans les passions de Claude Berge, on retrouve son esprit et son âme de mathématicien.

Afin de conclure sur la vie de cet homme éclectique et fascinant qui s'est terminée prématurément le 30 juin 2002, laissons la parole à Vasek Chvatal de Rutgers University (Etats-Unis) :

« Le départ de Claude Berge a laissé un vide douloureux dans la vie de beaucoup d'entre nous. Il enchantait les gens autour de lui avec ses multiples talents, sa grande érudition dans de nombreux domaines, son sens de l'humour, sa modestie, son amour de la vie. »

Claude Berge

Et la Reine Aztèque

Claude Berge a construit son poème
«La Reine Aztèque»
sur le modèle des illusions géométriques
inspirées de celle de Sam Lyod,
ou de DeLand

Claude Berge écrit un sonnet (4, 4, 3, 3) donc 14 vers

Tandis qu'en frissonnant elle égrenait des vers
L' Aztèque impertubable à la touque imprécise
Serrait sa souveraine une blonde aux yeux verts
D'un lien libidineux que la froidure attise
Dans l'Ouest enfoui dit-elle à son amant pervers,
C'est là que l'art jaillit, que l'Inca prosaïse,
Et que la pyramide abolit l'univers !
Nul n'entend le muet qui tout doucement s'enlise...

Comme le perspicace Apion conjecturait,
Jeune ami présomptueux plus fou qu'il ne parait,
N'offre pas de pactole à ton gardien farouche
Si le verbe à la fois oppresseur et charmant
D'un tel triomphateur ne trouble le diamant
Même Xipe Totec ...fuit et détruit sa souche

Il scie les vers, coupe et recolle...

Tandis qu'en frissonnant elle
L'
Serrait sa souveraine une blonde
D'un lien
Dans l'Ouest enfoui dit-elle à son amant
C'est là que l'art
Et que la pyramide abolit l'univers
Nul n'entend le muet qui

Comme le perspicace Apion
Jeune
N'offre pas de pactole à ton gardien
Si le verbe
D'un tel triomphateur ne trouble le diamant
Même Xipe Totec

égrenait des vers
Aztèque impertubable à la touque imprécise
aux yeux verts
libidineux que la froidure attise
pervers,
jaillit, que l'Inca prosaïse,
!
tout doucement s'enlise...

conjecturait,
ami présomptueux plus fou qu'il ne parait,
farouche
à la fois oppresseur et charmant
...
fuit et détruit sa souche

et construit une ode (4, 3, 1, 6, 1) de 15 vers ....

Tandis qu'en frissonnant elle conjecturait,
L' ami présomptueux plus fou qu'il ne parait,
Serrait sa souveraine une blonde farouche
D'un lien à la fois oppresseur et charmant
Dans l'Ouest enfoui dit-elle à son amant ...
C'est là que l'art fuit et détruit sa souche
Et que la pyramide abolit l'univers

Nul n'entend le muet qui égrenait des vers
Aztèque impertubable à la touque imprécise
Comme le perspicace Apion aux yeux verts
Jeune libidineux que la froidure attise
N'offre pas de pactole à ton gardien pervers
Si le verbe jaillit, que l'Inca prosaïse,
D'un tel triomphateur ne trouble le diamant !
Même Xipe Totec tout doucement s'enlise...

Lycée Gay Lussac de Limoges

Des mots et des graphes

Quelques compléments au vocabulaire défini sur le panneau
Un **graphe simple** est constitué d'un ensemble S fini non vide de **sommets** et d'un ensemble de paires d'éléments de S appelées **arêtes** ; dans le cas où il y a des sommets isolés, on parle de **graphes.**

Une **chaîne** est une liste ordonnée de sommets telle que chaque sommet de la liste soit adjacent au suivant.
Un **cycle** est une chaîne fermée composée d'arêtes toutes distinctes.

Une **chaîne eulérienne** est une chaîne qui contient une fois et une seule toutes les arêtes du graphe ; si cette chaîne est fermée on parle de **cycle eulérien.**

La **longueur d'une chaîne** est le nombre d'arêtes qui la composent.

La **distance entre deux sommets** est la plus courte longueur des chaînes qui les relient.
Le **diamètre d'un graphe** est la plus grande distance entre deux sommets.

En théorie des graphes il est possible, très vite, d'énoncer et de montrer des résultats simples et puissants

Voici n des tout premiers :
" *La somme des degrés d'un graphe simple est égale à deux fois le nombre d'arêtes du graphe"*.
On en déduit que" *la somme des degrés d'un graphe simple est pair* "
preuve : Dans un graphe, toute nouvelle arête entre les sommets Xi et Xj augmente le degré du sommet Xi de 1 et celui du sommet Xj de 1 donc le degré du graphe de 2.

L'énoncé d'Euler

"*Dire qu'un graphe connexe possède un chemin eulérien est équivalent à dire que tous ses sommets sont de degré pair sauf deux éventuellement* ".

La condition est nécesaire et s'explique aisément : considérons un éventuel chemin solution. Prenons un point qui ne soit ni de départ ni d'arrivée. Chaque fois que le chemin y passe, il arrive par une arête et repart par une autre. Comme un chemin ne repasse jamais par la même arête, il faut qu'à ce point converge un nombre pair d'arêtes ; deux si le chemin passe une fois, quatre si le chemin passe deux fois, ...D'où une première propriété simple : pour qu'un graphe soit eulérien il faut que le degré de tous ses sommets, sauf éventuellement deux, soit pair.

La condition est suffisante et la démonstration donne le moyen de construire effectivement un chemin eulérien.
Dans le cas où tous les sommets sont de degré pair, on part d'un sommet A quelconque et on progresse sur le graphe de sommet en sommet sans jamais repasser sur la même arête. On ne s'arrête que que lorsque nous sommes bloqués sur un sommet d'où ne repart aucune arête non encore empruntée. En tout point autre que le sommet A, le nombre d'arêtes déjà parcourues au moment où nous arrivons est impair ; comme tous les degrés sont pairs ; nous en concluons que nous sommes revenu en A et que soit nous avons parcouru toutes les arêtes, soit il reste au moins un point B auquel sont adjacentes au moins deux arêtes non empruntées. On refait alors la même chose à partir de B, puis la connexité du graphe permet de raccorder les deux circuits. Si les deux circuits recouvrent tout le graphe on a fini, sinon il reste un autre sommet à partir duquel on recommence ....

La suite de Collatz

Une occasion de présenter un raisonnement sur un organigramme , la recherche des différentes suites possibles peut se visualiser sur un arbre.

Un beau résultat, une preuve qu'en mathématique on ne sait pas tout ...

Des sites à aller explorer :

http://perso.wanadoo.fr/jean-paul.davalan/divers/syracuse/

http://trucsmaths.free.fr/js_syracuse.htm

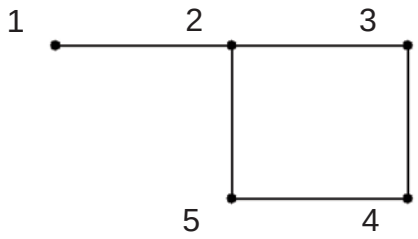
Le voyageur de commerce
Calculez et vous verrez que ce n'est pas en prenant, à chaque fois, la ville la plus proche que l'on trouve le plus court chemin...

Matrice d'adjacence d'un graphe

Les sommets du graphe doivent être classés : X1, X2, X3, ...
Le teme a_{ij} de la matrice désigne le terme placé sur la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne.
a_{ij} = 1 si les sommets X_i et X_j sont liés par une arête..
a_{ij} = 0 si les sommets X_i et X_j ne sont pas liés par une arête

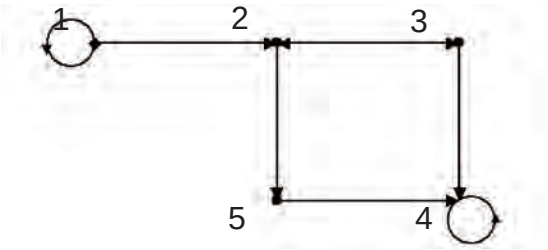
A tout graphe est associé une matrice et inversement toute matrice de 0 et de 1 représente un graphe.

Exemple pour un graphe non orienté :



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple pour un graphe orienté



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriétés:

-Pour un graphe non orienté, la matrice d'adjacence est symétrique.
-Pour un graphe sans boucle, la diagonale de la matrice ne contient que des 0.
-La demi somme de tous les coefficients d'une matrice d'adjacence d'un graphe non orienté donne le nombre d'arêtes de ce graphe.
-la somme des coefficients de la ligne(resp colonne) i de la matrice associée à un graphe orienté donne le nombre d'arêtes orientées d'origine (resp d'extrémité)le sommet X_i de ce graphe , c'est à dire le nombre de successeurs (resp de prédécesseurs) du sommet X_i .

.Chaînes de longueur n reliant deux sommets d'un graphe

Soit G un graphe d'ordre p, X_1, X_2, ...X_p.
Soit M sa matrice d'adjacence et n un entier naturel. On peut montrer que :

"Le terme b_{ij} de la matrice M^n, donne le nombre de chemin de longueur n reliant le sommet X_i et le sommet Xj du graphe ."

Voici une application concrète du calcul du produit de matrices !

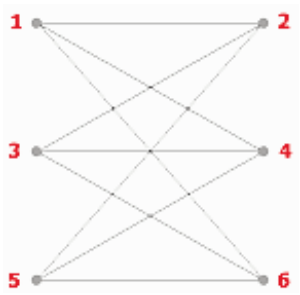
Enigmes, jeux et graphes

Derrière le problème simple des "*Trois maisons et des trois puits"* se cachent une notion forte et peu évidente : **les graphes planaires.**

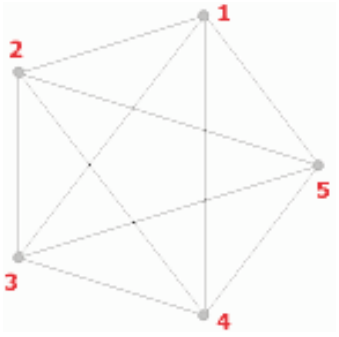
Un graphe est **planaire** si aucune de ses arêtes ne se coupent.
Celà parait simple et pourtant trouver une caractéristion des graphes planaires est difficile.

Pour la petite histoire :
Kuratowski a démontré qu'un graphe n'est pas planaire, si et seulement si, il contient une extension d'un des **deux graphes non planaires** de base.

Le graphe $K_{3,3}$



Le graphe K 5



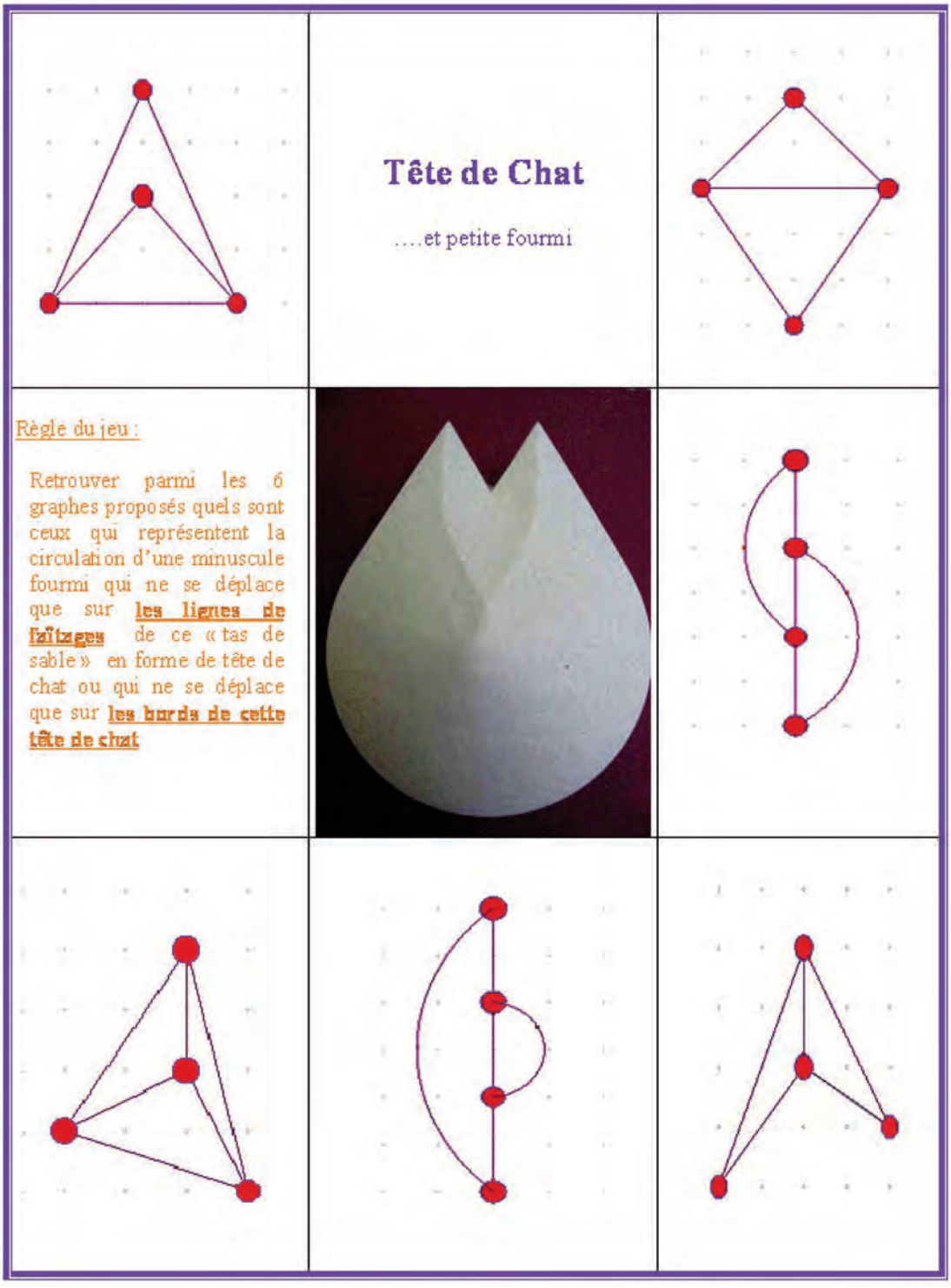
Kuratowski annonça son résultat à la société polonaise de 21 juin 1929 et n'en publia la démonstration qu'en 1930. Entre temps, deux autres mathématiciens étaient arrivés au même résulta !

D’un graphe à l’autre

Des graphes dissemblables peuvent traduire la même situation et donc avoir le même nombre de sommets et d’arêtes. Ils sont dits isomorphes.

Les graphes de l’atelier scientifique de Nantes

Ces jeunes lycéens ont observé l’écoulement du sable et la forme des tas de sables . A ces formes ils ont cherché à associer un graphe et ils ont imaginé un jeu....



Le jeu d'échec et la théorie des graphes

Les casse-tête sur l'échiquier sont probablement aussi vieux que le jeu lui même. Ceux qui concernent les déplacements du cavalier ont fasciné de nombreux mathématiciens
Ils constituent un exemple de recherche de chemins dits hamiltoniens.

-Comment faire en sorte que le cavalier visite toutes les cases de l'échiquier une fois et une seule ?

avec de nombreuses questions complémentaires :
-Combien de manières ?
-Peut-on revenir à son point de départ ?
-Peut-on partir de n'importe quelle case ? arriver sur n'importe quelle case ?

Etude de nombreux jeux à l'aide de la théorie des graphes

L'ane rouge

Le Morpion

Déplacements du cavalier

Les premières pages de l'ouvrage de Claude Berge dans la bibliothèque de l'Oulipo sur "*Raymond Queneau et la combinatoire" (n°89)*

Claude Berge

Raymond Queneau et la combinatoire

La Bibliothèque Oulipienne
numéro 89

Les premiers textes de Queneau sur les Mathématiques semblent dater de 1935 (*La Dialectique des Mathématiques chez Engels*, réimprimé en 1963 dans son livre *Bords*). Depuis lors, son œuvre littéraire n'a cessé d'alterner avec des clins d'œil à un certain public scientifique plus spécialisé, car il s'adresse à tour de rôle aux spécialistes de la Topologie (« cet employé avait l'air compact : compact = fermé + borné »), de l'Algèbre Linéaire (« Sur l'analyse matricielle du langage»), de la Théorie des Groupes (« La sextine peut-elle se généraliser ? »), de la Théorie des Nombres (Les suites s-additives), ainsi qu'à d'autres disciplines mathématiques que Queneau, quoique déconcerté (il le dit lui-même à la page 12 de *Bords*), aimait retrouver dans la lecture du traité de Bourbaki.

Mais vers 1960, un grand nombre de résultats mathématiques nouveaux échappaient à cette classification et commençaient à se regrouper sous le vocable de **Combinatoire**, ou de **Mathématiques Discrètes**; je publiais à cette époque dans la *Revue de la Société Française de Recherche Opérationnelle* une rubrique permanente de « problèmes plaisans et délectables », où mon but principal était de faire référence non pas à la Théorie des Nombres ou à la Géométrie mais à la Combinatoire, et à un type de raisonnements curieux qui ne trouvait pas encore place dans les universités. Certains de ces problèmes étaient d'ailleurs déjà connus du folklore des congrès, mais pouvaient être généralisés ; d'autres, complètement nouveaux, ont donné lieu à des recherches ultérieures et à des thèses de doctorat. C'est à cette occasion que débutèrent mes contacts épistolaires avec Raymond Queneau, pour qui ces « amusettes» étaient un élément sérieux des mathématiques contemporaines.

Dans *Bâtons, chiffres et lettres* (Gallimard 1965, p. 323), celui-ci précise d'ailleurs: « *Rappelons-nous que la topologie ou la théorie des nombres sont nées en partie de ce qu'on appelait autrefois les « mathématiques amusantes ». Je saluerai au passage la mémoire de Bachet de Méziriac... qui fut un des premiers membres de l'Académie Française. Rappelons-nous aussi que le calcul des probabilités n'a été à ses débuts qu'un recueil d'amusettes, comme le dit Bourbaki dans la Notice historique du fascicule sur l'intégration. Et la théorie des jeux jusqu'à von Neumann.»*

En retrouvant dans un vieux carton ma correspondance avec Raymond Queneau, qui présente à la fois des remarques et des solutions intéressantes aux problèmes proposés dans notre rubrique, j'ai pensé qu'il était temps de la commenter.

1950 - 1958 : Pour de nouvelles directions de recherche, la mathématique se détourne de la physique et de l'engineering et trouve les sciences humaines

C'est le 14 février 1952 que je reçois la première lettre de Queneau (Annexe A) qui dit s'intéresser « particulièrement » à la Théorie des jeux ; je lui envoie immédiatement une copie d'un petit livre à paraître dans le *Mémorial des Sciences Mathématiques*. Le 13 mars 1952 , je reçois en réponse les commentaires de Queneau (Annexe B) : *« (..) que la boucle des sciences se referme, et que la psychologie se trouve maintenant plus proche des mathématiques que des sciences biologiques. Ou plutôt que naît en ce moment un nouveau courant Maths -> Ps. [Psy] --o Bio --> Ph. Ch. (Physique chimie], qui rencontrera sans doute un jour le courant «classique» Maths -> Ph. Ch. -> Bio --o Ps.»*

Cette idée va être reprise par lui à plusieurs reprises. La Théorie des jeux, ainsi appelée dans le livre de John von Neumann et Oskar Morgenstern, devient à la mode, particulièrement à Princeton où travaillaient sur ce sujet de jeunes mathématiciens devenus

aujourd'hui célèbres comme John Milnor, futur médaillé Field, ou John Nash, futur prix Nobel. En 1956, von Neumann, qui m'avait invité à passer un an auprès de lui à l'Université de Princeton venait de mourir; je m'y rends néanmoins, et à mon arrivée je trouve un mot de Queneau :
« Il me semble, disait-il, *que, en collaboration avec Oskar Morgensterre, von Neuman en élaborant la théorie des jeux aussi bien de hasard et d'astuce que de raisonnement, a fondé une axiomatique de la psychologie « collective » et de l'économétrie. Ce livre splendide me parait confirmer dans l'ensemble mes remarques sur la place des mathématiques dans la classification des sciences.»*

Ce rapprochement inattendu des mathématiques abstraites avec les sciences humaines (en attendant la poésie et la littérature) ne présage-t-il pas déjà la création en 1960 de l'OULIPO par François Le Lionnais et Raymond Queneau ?

1963 : Le problème du cercle des irrascibles

« Ma rubrique sur les « problèmes plaisans et délectables » que je publiais depuis deux ans déjà consistait alors en une collection de raisonnements curieux, mais certains correspondants attendaient des problèmes plus difficiles, avec une ouverture inédite sur la Théorie des Graphes. C'est un actuaire de Nice, le colonel René Sousselier, qui le 6 janvier 1963 m'envoya sous forme d'un défi aux lecteurs de la rubrique le spécimen le plus étonnant (que je publiai dans la Revue au 4` trimestre 1963).

« Il existe dans ma ville, dit-il, un cercle dont les membres s'appellent André, Bernard, Camille... les initiales étant toutes différentes et consécutives. André, le président, décida de les réunir autour d'une table ronde afin de ne pas poser de problème de préséance. II se heurte à une grave difficulté : les membres du cercle ont des caractères si difficiles que chacun a peu d'amis parmi les autres membres et ressent de l'antipathie pour tous les autres. Or, il voulut que chacun fût assis entre deux de ses amis, ce qu'il appelait « la condition d'amitié ».
Prévoyant, il se proposa de faire le plan des places à table. Il plaça son ami Bernard à sa droite, puis un ami de Bernard et ainsi de suite. II ne put achever, arrivant à deux ennemis côte-à-côte. Il recommença autrement.
Nouvel échec. Il s'entêta et essaya des quantités d'arrangements sans parvenir à satisfaire la condition d'amitié. En désespoir de cause, il s'adressa à un ami mathématicien à qui il dit les noms et amitiés de chacun... Celui-ci, peu après, donna cette réponse :
- C'est absolument impossible. Mais si l'un de vous est absent... n'importe lequel, tous les autres peuvent être placés en cercle, deux voisins quelconques étant amis. J'ajoute que si vous étiez moins nombreux ce curieux ensemble de propriétés ne pourrait se présenter.
André décida de se sacrifier, en se prétendant malade le jour de la réunion. Il confia la présidence à Bernard avec le plan de la table. On s'aperçut alors que tous étaient placés exactement... dans l'ordre alphabétique ! »
Et Sousselier conclut en demandant: « Combien de membres au minimum peut comporter le cercle ? Quelles sont les amitiés et antipathies de chacun ? Peut-on démontrer que cet arrangement est le seul à satisfaire aux conditions posées ?»

Queneau se passionna pour ce problème, et prétendit pouvoir montrer qu'il n'y a pas de solution avec un cercle de cinq ou de six membres. Nous ne connaissons pas son raisonnement, mais dans le numéro 31 de la Revue parut la réponse avec la démonstration que nous devons à J. C. Herz, J. J. Duby et E Vigué : il y a exactement 10 membres dans le cercle, que l'on appelera A, B, C,. . ., I, J , et les paires d'amis sont AB, AE, AH, BC, BJ, CD, CG, DI, DE, EF, FJ, FG, GH, HI, IJ. Il a fallu attendre 1996, et pas mal d'heures de calcul par ordinateur, pour pouvoir affirmer qu'une configuration analogue ne peut pas exister lorsque le nombre des membres est inferieur ou égal à 9 (Sousselier), ou égal à 11 (Herz, 1965), à 12 (Herz, 1965), à 14 (Collier et Schmeichel, 1978) ou à 17 (Aldred, McKay, Wormald). En outre, *elle existe dans tous les autres cas*.

Ajoutons que la Théorie des Graphes avait fait de grands progrès depuis quelques années et que d'importants travaux venaient d'être publiés sur l'existence de graphes « hamiltoniens », c'est-à-dire ayant la propriété de posséder des cycles passant une fois et une fois seulement par chacun de ses sommets (« cycles hamiltoniens ») ; il était donc normal d'appeler « graphe hypohamiltoniens » celui qui représente les amitiés des membres du cercle. Sousselier ne savait pas que le graphe hypohamiltonien qu'il avait découvert portait déjà le nom de « graphe de Petersen», qu'il était célèbre pour avoir fourni des contre-exemples à de nombreuses conjectures, et qu'un livre de 350 pages allait lui être consacré (à savoir: D .A. Holton et J. Sheehan, The Petersen Graph, Cambridge University Press, 1993). Enfin, il ne soupçonnait pas que son problème allait passionner le monde des mathématiciens avec en particulier J. Doyen, WE Lindgren, C. Thomassen, J.A. Bondy, V Chvâtal, Z. Skupien.

Pour l'histoire et les références des travaux concernant le sujet, on peut se rapporter aux articles de J.-C. Herz : 1° *Recherche systématique des graphes hypohamiltoniens* (in *Théorie des Graphes*, Dunod 1967). 2° *Un problème d'analyse combinatoire, les graphes hypohamiltoniens*
(in *Problèmes combinatoires*, I. B.M. France 1972). 3'. René Sousselier et la saga des graphes hypohamiltoniens (in *Regards sur les Mathématiques du XXe siècle*>, Proc. Coll. Amiens, A.D.C.S.)

1967 : Les solutions de Queneau au problème des jetons noirs et des jetons blancs

Dans la Revue (N°41, 1966), j'ai ensuite proposé aux lecteurs un curieux problème d'ordonnancement qui à première vue (mais à première vue seulement) paraît tellement simple qu'on pourrait le qualifier d'attrape-nigaud:

On considère une rangée de carrés alignés côte à côte, comme sur un échiquier, et sur cinq carrés consécutifs on place trois jetons noirs et deux jetons blancs en alternant les couleurs : N B N B N. On demande s'il est possible d'obtenir la séquence N N N B B (les cinq jetons noirs adjacents et consécutifs, suivis sans laisser d'espace vide par les deux jetons blancs dans des carrés consécutifs) et cela au moyen de seulement trois déplacements ; on appelle ici « déplacement » la translation d'une paire de jetons adjacents que l'on place ensemble sur deux carrés vides adjacents.

On peut aussi placer au départ un nombre fixé (dénoté n) de jetons alternativement noirs et blancs, et demander quel est le nombre h(n) de déplacements nécessaires pour obtenir la séquence N N N. ... B B B B. Le chercheur empirique qui veut dès le début rapprocher le plus grand nombre de paires monochromes se trouvera vite en difficulté ;

il sera sans doute étonné d'apprendre que même dans le cas le plus simple des cinq jetons, il y a non pas une solution, mais trois solutions non-équivalentes !

Raymond Queneau s'attaque à ce problème pour toutes les valeurs de l'entier n depuis 5 jusqu'à 21. À l'aide de nombreux tableaux, il décrit d'abord les solutions qu'il trouve mais qui ne sont pas encore toutes optimales (lettre du 13 mars 1967, Annexe F). Puis il les corrige (Annexe G). Enfin, dans ses lettres jusqu'au 10 mai 1967, il avoue ne pas savoir si avec 15 jetons, il existe une méthode avec seulement huit « déplacements ». Ses solutions sont différentes des autres méthodes proposées, et, comme les autres lecteurs de la rubrique, il n'envisage guère de dénombrer les solutions non-équivalentes.

Dans le cas où le nombre de jetons est un nombre pair, le même problème avait déjà été posé en 1885 par un professeur de mathématiques écossais, M. Tait, avec des souverains et des shillings au lieu de jetons noirs et blancs ; une solution imaginée par un M. Delannoy est d'ailleurs décrite dans le livre de E. Lucas, *Récréations mathématiques* (réédition Albert Blanchard 1960, Vol. 3). Seul Queneau a étudié le problème lorsque le nombre de jetons est nombre impair. Ajoutons qu'il ne s'est jamais prononcé sur le cas où n=15.

✹✹✹

Le Théorème des quatre couleurs

Son énoncé : *« Il est possible de colorier à l'aide de quatre couleurs différentes n'importe quelle carte plane de sorte que deux pays voisins soient toujours de deux couleurs différentes ».*
Cet énoncé fut formulé pour la première fois par l'écossais Francis Guthrie en 1852. Les mathématiciens Auguste de Morgan et Arthur Cayley travaillèrent sur cette question et en 1879 un avocat Alfred Kempe pensa en énoncer la preuve. Dix ans plus tard, le mathématicien P.J. Headwood y trouva une erreur subtile et rédhibitoire.

Alors les plus grands mathématiciens s'attaquèrent de nouveau à cette question.

Il se trouve que la théorie des graphes fournit un outil puissant pour attaquer ce problème. On imagine que la capitale de chaque pays est symbolisé par un sommet auquel on attribue une couleur et que deux capitales de pays voisins sont reliées par une arête. On obtient alors le graphe associé à la carte à colorier ; ce graphe a deux propriétés importantes : il est sans boucle et il est planaire.

La forme graphique de l'énoncé du théorème des quatre couleurs devient alors :
" *le nombre chromatique d'un graphe planaire est au plus quatre."*

En utilisant le résultat d'Euler et un raisonnement par récurrence il est relativement facile de montrer une forme affaiblie de ce théorème, « *le théorème des 5 couleurs* »
Pour descendre à 4 couleurs d'énormes difficultés apparaissent. La technique d'Appel et Haken leur a permis de contourner la difficulté en ramenant le problème à l'étude de 1405 configurations ; alors avec " près de 500 pages de raisonnement, 10 000 diagrammes analysés, 1200 heures de calculs sur ordinateurs de haute performance, dix milliards de décisions logiques élémentaires « *le théoème des quatre couleurs* » fut démontré et devient le premier exemple de preuve dans l'histoire des mathématiques ayant nécessité l'usage systématique de l'ordinateur.
Du coup un nouveau débat agite maintenant la communauté mathématique : peut on accepter ce type de preuve ?

D'après article du HS Tangente N°12 sur les Graphes

Algorithme de coloration d'un graphe

Cet algoritme permet d'obtenir une coloration d'un graphe mais ne donne pas nécessairement son nombre chromatique.

Etape 1 : Classer les sommet dans l'ordre décroissant de leurs degrés.
Tant qu'il reste des sommets non colorés effectuer les étapes suivantes :

Etape 2 : Choisir une nouvelle couleur appelée « couleur d'usage ».

Etape 3 : Choisir dans la liste des sommets ordonnés le premier sommet non coloré et le colorer avec la couleur d'usage.

Etape 4 : examiner, tour à tour, dans l'ordre de la liste, tous les sommets non colorés et pour chacun d'eux, le colorer avec la couleur d'usage lorsqu'il n'est adjacent à aucun sommet déjà coloré.

Lorsque tous les sommets sont colorés, l'algorithme est terminé.

Graphes et probabilités

Graphe étiqueté - Graphe pondéré

Un graphe **étiqueté** est un graphe orienté dont les arêtes sont affectées d'**étiquettes.**

Une **étiquette** peut être un nombre ou une lettre.

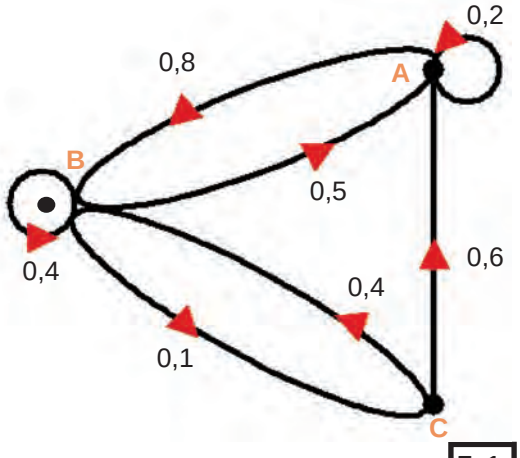
Si les étiquettes sont des nombres positifs on parle de graphe **pondéré** et ces nombres sont appelés des **poids.**

Le **poids d'une chaîne** est la somme des poids des arêtes qui la compose.
Une **plus courte chaîne** entre 2 sommets est parmi les chaînes qui les relient celle de poids minimum.

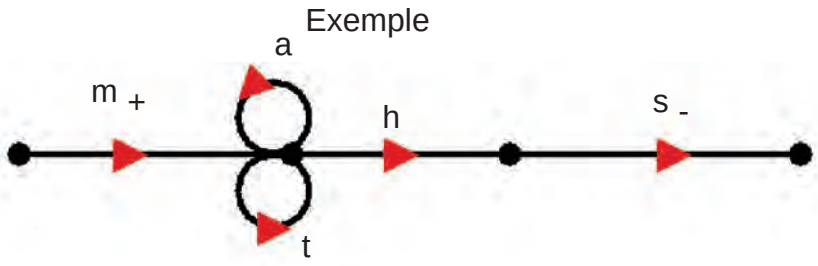
Graphe probabiliste ou chaîne de Markov - Matrice de transition

Un **graphe probabiliste ou chaîne de Markov** est un graphe pondéré tel que chaque sommet (en nombre fini) soit l'origine d'arêtes pondérées dont la somme des pondérations vaut 1.
Les sommets A, B, C, ... représentent les différents états possibles d'un modèle à un instant déterminé .
Les arêtes sont pondérées par la probabilité d'une épreuve , du passage d'un état à un autre du modèle : A ⟶ B
La matrice associée M est appelée **matrice de transition du graphe**

$$\begin{pmatrix} AA & AB & AC \\ BA & BB & BC \\ CA & CB & CC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,6 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}$$



Graphes étiquetés par une lettre



Lorsqu'un graphe est étiqueté par des lettres il peut reconnaître des mots. Pour celà il faut spécifier une arête origine (par exemple en affectant le signe + à la lettre origine) et une arête extrémité (en lui alors affectant le signe -)

Les mots reconnus sont : maths, maahs, mtths, mtahs

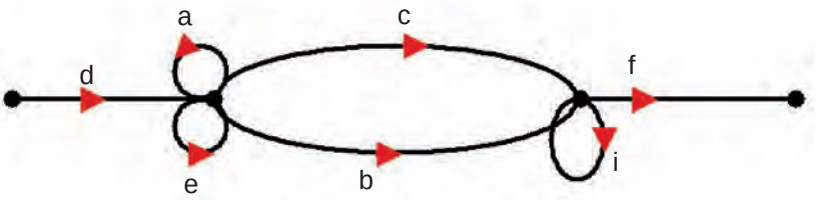
Reconnaissance de codes

Un réseau informatique doit être accessible à un grand nombre de personnes, qui ne doivent cependant pas avoir le même code d'accès. Cet accès est régi par un des graphes étiquetés ci dessous ; un mot est accepté comme code d'accès si il est composé d'une liste de lettres commençant par d et se terminant par f, associée à une chaîne de ce graphe.

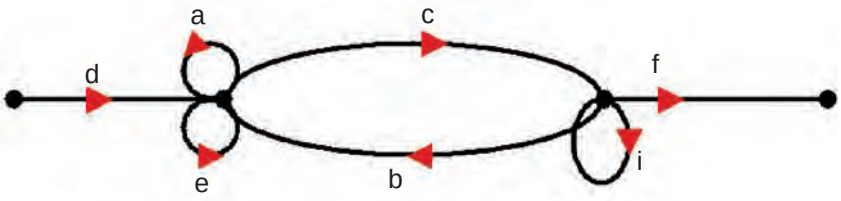
- Les mots « decif » ou « daaeebif » sont-ils des mots reconnus par les graphes étiquettés ci-dessous ?

-Donner pour chaque graphe la liste des mots de 5 lettres reconnus.

Graphe 1



Graphe 2



Les graphes probabilistes, des exemples simples de dynamique probabiliste

Avec ces graphes on considére un modèle qui peut être dans un nombre fini n d'états et qui passe d'un état à un autre avec une probabilité qui ne dépend que du dernier état dans lequel il était.

Par exemple, pour l'évolution d'une endémie où l'on a trois états seulement : non immunisé, immunisé, malade on ne tient pas compte si la personne qui tombe malade l'a déjà été plusieurs fois ...

Les résultats essentiels de ce chapitre porte sur le théorème de convergence vers un état stationnaire, vrai dès qu'une puissance de la matrice associée a tous ses termes strictement positifs

On peut rapprocher ces résultats de ceux trouver quand on cherche les problèmes de comptage de chemins reliant deux sommets en n coups qui se fait à l'aide du calcul de la puissance nième de la matrice d'adjacence du graphe (panneau 2)

Les graphes pour circuler

Edsger Dijkstra

Edsger Dijkstra (Rotterdam, 11 mai 1930 - 6 août 2002) est un mathématicien et informaticien néerlandais du XX^{e} siècle.

Après des études de physique théorique, il s'engagea dès 1955 dans le domaine de l'informatique naissante dont il fut l'un des pionniers les plus éclairés.

Parmi ses contributions se trouve un algorithme de plus court chemin dans les graphes, connu sous le nom d'algorithme de Dijkstra. Enseignant à l'université d'Eindhoven, il commença à se faire connaître en matière de systèmes avec The THE operating system, un système construit en couches d'abstractions successives, et idéal pour l'enseignement (« THE» signifiant Technische Hochschule Eindhoven). Fort de l'expérience d'écriture de ce système, il formalisa une notion avant lui diffuse, celle de sémaphore, et introduisit la notion de section critique avec deux exemples devenus des classiques :

- Le problème des lecteurs et des rédacteurs
- Le dîner des philosophes

Constatant les dégâts provoqués par l'usage incontrôlé de l'instruction GOTO en programmation, il rédigea en 1968 dans les Communications of the ACM l'article fondateur On the Go To Statement Considered Harmful, considéré commel'article qui décida nombre de programmeurs à passer à la programmation structurée (contenant des structures de contrôle plus policées comme if ... then ... else ... fi, do...while, repeat...until). Il avait eu un rôle important dans le développement du langage Algol à la fin des années 1950, et développa ensuite « la science et l'art des langages de programmation en général, contribuant grandement à notre compréhension de leur structure, de leur représentation et de leur implémentation » (citation de l'ACM, Association for Computer Machinery). Toutefois Niklaus Wirth (créateur d'Algol W et de Pascal) alla plus loin que lui dans le domaine en considérant de pair la structuration des programmes et celles des données. Le discours qu'il prononça en 1972 lorsqu'il reçut le prix Turing, The Humble Programer, est resté célèbre. Il est disponible en traduction française (lien externe).

Anecdotes

Il est né dans le même village que Vincent Van Gogh et son ambition était de devenir plus célèbre que lui. Parmi les informaticiens c'est réussi, mais pour le grand public ce n'est pas certain.

Il adorait Martin Luther King.

Citations

« L'informatique est autant la science de l'ordinateur que l'astronomie est celle du téléscope ».

A propos de l'intelligence artificielle :

« Se demander si un ordinateur sait penser, c'est comme se demander si un sous-marin sait nager.»

TP
Graphes TES

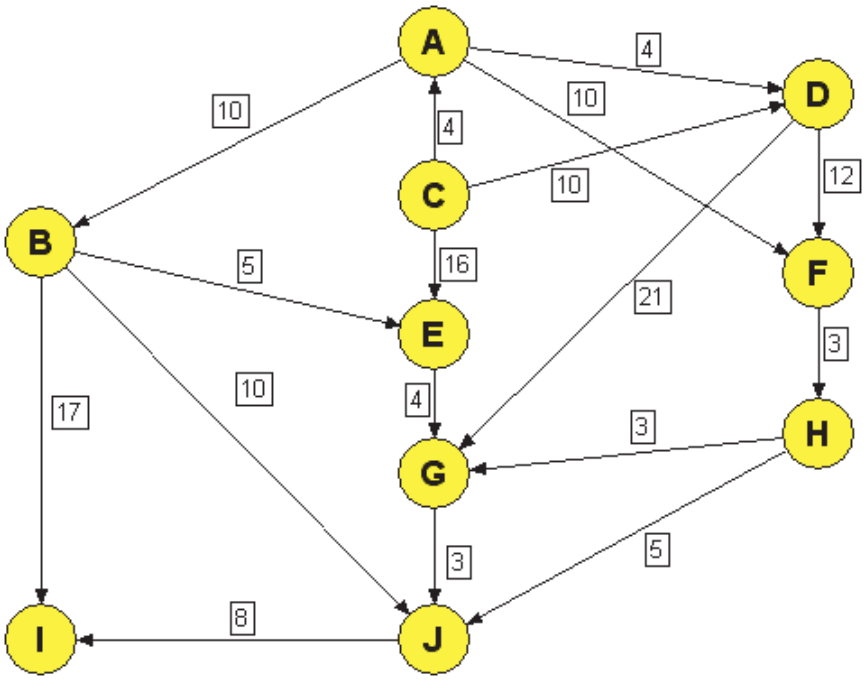
Mise en œuvre de l'algorithme de Dijkstra

Algorithme de Dijkstra : Plus court chemin du sommet α au sommet ω

Étape 1	Placer tous les sommets du graphe dans la première ligne d'un tableau. La deuxième ligne du tableau est obtenue en écrivant le coefficient **0** sous l'origine α et le coefficient **∞** sous tous les autres sommets. Sélectionner le sommet origine α. Son coefficient est 0.
Étape 2	Soit **X** le sommet de plus petit coefficient. Commencer une nouvelle ligne dite ligne courante. Rayer toutes les cases vides de la colonne **X**.
Étape 3	Pour tous les sommets adjacents à **X** répéter Soit **Y** le sommet courant **p = Coef(X) + poids de l'arête reliant X à Y**. **SI p < Coef(Y) ALORS** écrire « **p X** » dans la case correspondante **SINON** recopier le contenu de la ligne précédente **S'il** reste des sommets adjacents à **X** passer au suivant **sinon** aller à l'étape 4
Étape 4	Compléter la ligne courante en recopiant les valeurs de la ligne précédente dans les cases vides.
Étape 5	S'il reste des sommets non sélectionnés, retourner à l'étape 2 Sinon aller à l'étape 6.
Étape 6	La plus courte chaîne de α à ω est obtenue en écrivant de droite à gauche le parcours en partant de ω

Exemple : Plus court chemin de C à I

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	Sél	Coef
∞	∞	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	C	0
4 C	∞		10 C	16 C	∞	∞	∞	∞	∞	A	4
	14 A		8 A	16 C	14 A	∞	∞	∞	∞	D	8
	14 A			16 C	14 A	29 D	∞	∞	∞	B	14
				16 C	14 A	29 D	∞	31 B	24 B	F	14
				16 C		29 D	17 F	31 B	24 B	E	16
						20 E	17 F	31 B	24 B	H	17
						20 E		31 B	22 H	G	20
								31 B	22 H	J	22
								30 J		I	30



TP
Graphes TES

Mise en œuvre de l'algorithme de Dijkstra
Commentaires

Lignes 1 et 2 : Le tableau comporte deux colonnes supplémentaires pour faciliter la mise en œuvre de l'algorithme. La colonne Sél recense le sommet de plus petit coefficient de la ligne et la colonne Coef contient le coefficient affecté à ce sommet

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	X	Coef(X)
∞	∞	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	C	0

Ligne 3 :

- X=C.
- Toutes les cases vides de la colonne C sont rayées.
- Les sommets adjacents à C sont A D C.
- Pour A : p = 0 + 4 = 4 , on écrit 4 C dans la colonne A.
- Pour D : p = 0 + 10 = 10, on écrit 10 C dans la colonne D.
- Pour E : p = 0 + 16 = 16, on écrit 16 C dans la colonne E.
- On recopie les valeurs de la ligne précédente dans les cases vides.
- Le plus petit coefficient de la ligne est **4**, on sélectionne donc le sommet **A** (colonne Sél) et on recopie son coefficient 4 dans la dernière colonne.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	Sél	Coef
∞	∞	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	C	0
4 C	∞		10 C	16 C	∞	∞	∞	∞	∞	A	4

Ligne 4 :

- X=A.
- Toutes les cases vides de la colonne A sont rayées.
- Les sommets adjacents à A sont B D F.
- Pour B : p = 4 + 10 = 14 , on écrit 14 A dans la colonne B.
- Pour D : p = 4 + 4 = 8. **On écrit 8 A dans la colonne D puisque 8 est inférieur au coefficient 10 précédent**.
- Pour F : p = 4 + 10 = 14, on écrit 14 A dans la colonne F.
- On recopie les valeurs de la ligne précédente dans les cases vides.
- Le plus petit coefficient de la ligne est 8, on sélectionne donc le sommet D (colonne Sél) et on recopie son coefficient 8 dans la dernière colonne.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	Sél	Coef
∞	∞	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	C	0
4 C	∞		10 C	16 C	∞	∞	∞	∞	∞	A	4
	14 A		8 A	16 C	14 A	∞	∞	∞	∞	D	8

Ligne 5 :

- X=D.
- Toutes les cases vides de la colonne D sont rayées.
- Les sommets adjacents à D sont F G.
- Pour F : p = 8 + 12 = 20. **Cette valeur est supérieure à la valeur précédente 14 donc on recopie la valeur précédente**.
- Pour G : p = 8 + 21 = 29. on écrit 29 D dans la colonne G.
- On recopie les valeurs de la ligne précédente dans les cases vides.
- Le plus petit coefficient de la ligne est 14, on sélectionne donc le sommet B (colonne Sél) et on recopie son coefficient 14 dans la dernière colonne. *On aurait également pu choisir le sommet F.*

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	Sél	Coef
∞	∞	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	C	0
4 C	∞		10 C	16 C	∞	∞	∞	∞	∞	A	4
	14 A		8 A	16 C	14 A	∞	∞	∞	∞	D	8
	14 A			16 C	14 A	29 D	∞	∞	∞	B	14

ETC.

Le parcours final s'obtient de la manière suivante : La dernière ligne du tableau ne contient que « 30 J » en colonne I. Donc pour arriver en I il faut venir de J. Pour arriver en J il faut venir de H (dernière case de la colonne J) et pour arriver en H il faut venir de F etc. Le parcours 50 (à « l'envers ») est donc le suivant : I - J - H - F - A - C soit finalement : **C – A – F – H – J – I**

TP
Graphes TES

Mise en œuvre de l'algorithme de Dijkstra

Algorithme de Dijkstra : Plus court chemin du sommet α au sommet ω

Étape 1
Placer tous les sommets du graphe dans la première ligne d'un tableau.
La deuxième ligne du tableau est obtenue en écrivant le coefficient **0** sous l'origine α et le coefficient **∞** sous tous les autres sommets.
Sélectionner le sommet origine α. Son coefficient est 0.

Étape 2
Soit **X** le sommet de plus petit coefficient.
Commencer une nouvelle ligne dite ligne courante.
Rayer toutes les cases vides de la colonne **X**.

Étape 3
Pour tous les sommets adjacents à **X** répéter
  Soit **Y** le sommet courant
  p = Coef(X) + poids de l'arête reliant X à Y.
  SI p < Coef(Y) ALORS écrire « **p X** » dans la case correspondante
  SINON recopier le contenu de la ligne précédente
  S'il reste des sommets adjacents à **X** passer au suivant **sinon** aller à l'étape 4

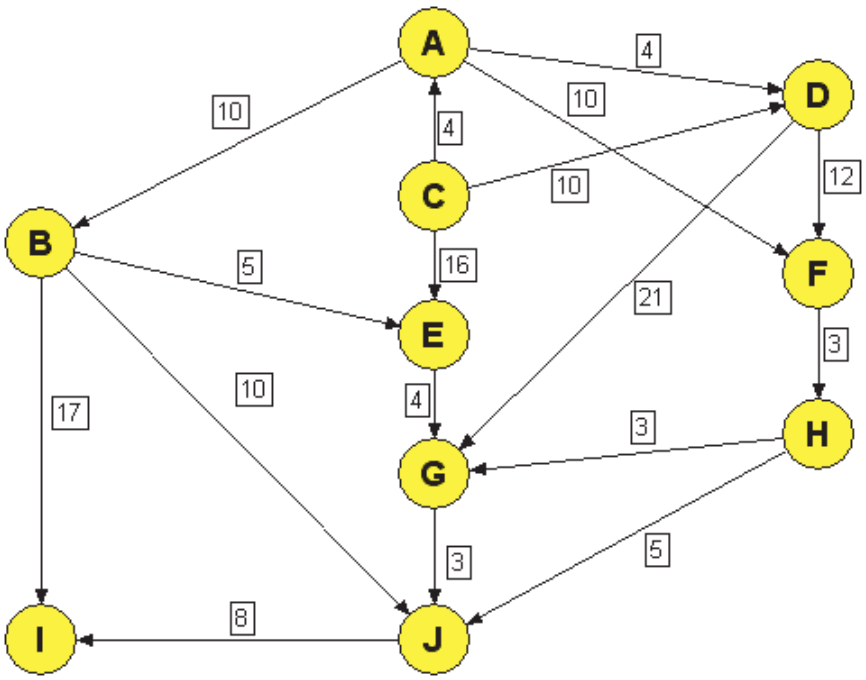
Étape 4
Compléter la ligne courante en recopiant les valeurs de la ligne précédente dans les cases vides.

Étape 5
S'il reste des sommets non sélectionnés, retourner à l'étape 2 Sinon aller à l'étape 6.

Étape 6
La plus courte chaîne de α à ω est obtenue en écrivant de droite à gauche le parcours en partant de ω

Exemple : Plus court chemin de C à I

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	Sél	Coef



Les graphes pour organiser

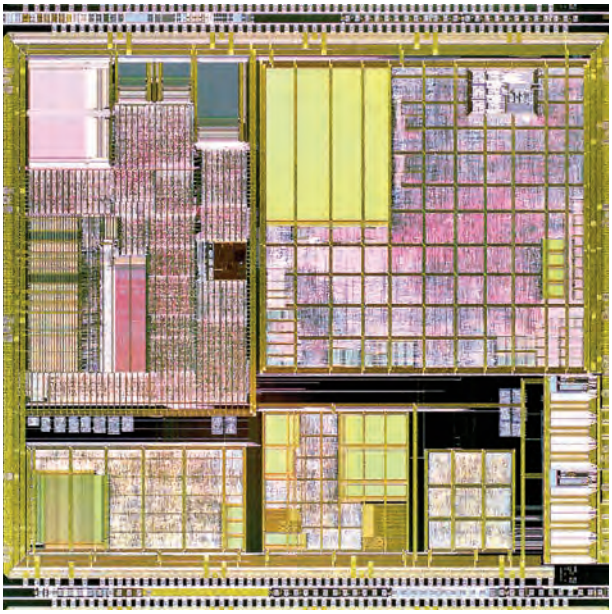
L**e P.E.R.T. ou en français, *Technique d'ordonnancement et de contrôle des programmes.***

La construction automobile ou d'un avion supersonique ou un programme d'alunissage passent par l'exécution d'un certain nombre de tâches , certaines peuvent être réalisées simultanément, d'autres doivent être menées dans un certain ordre et demande des temps de réalisation différents.
Il faut hiérarchiser les taches pour minimiser la durée totale d'exécution. La méthode PERT consiste à représenter sous forme de graphes les différentes contraintes. On représente chaque tâche par un sommet et on visualise la nécéssité d'exécution de la tâche i avant la tâche j par une arête allant de i vers j, arête étiquettée par le temps de réalisation de la tâche correspondante. Le graphe est sans cycle et peut être hiérarchisé par niveaux de sorte que toute arete orientée mène d'un niveau vers un niveau supérieur. Les taches de niveau 0 doivent être exécutées immédiatement et, pour toute tâche i, la meilleure data de commencement est égale à la durée du plus long chemein menant du niveau 0 au sommet i. Il faut donc pouvoir déterminer la longueur L(i) de ce plus long chemin jusqu'à i .

Algorithme de calcul du chemin le plus long

- Initialisation :
Hierarchiser le graphe par niveau,
Pour tous les sommets j du graphe
Si le sommet j est de niveau 0 alors poser L(j) = 0, sinon L(j) = -infini

- Détermination des plus grandes longueurs
Pour chaque niveau k par ordre croissant :
Pour tout sommet i de niveau k :
Pour tout sommet j successeur de i : poser d=L(i)+poids(i,j)
Si d isupérieur à L(j) alors poser L(j)=4



Des arbres à compresser

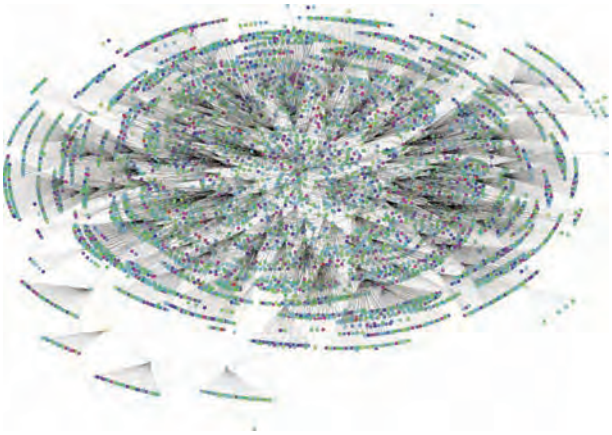
David Huffman a donné son nom à une méthode de compressiin des données aujourd'-hui à la base des diverses compressions utilisées sur l'internet : JPEG, MPEG 1,2 et 3. Remarquons qu'elle peut aussi servir en cryptographie.
Sur les ordinnateurs, les noms des programmes correspondants se terminent en général par **zip**.

Pour construire un arbre de Huffman associé à un texte, on commence par calculer la fréquence d'apparition de chaque caractère.
On commence par la racine de l'arbre, nous progressons de deux branches en deux branches, avec pour chaque bit, 0 à gauche et 1 à droite.
Avec les deux lettres les moins fréquentes (disons v et p), on forme la racine. La racine est étiqueté par ces deux lettres (ici v et p), puis nous considérons la lettre la moins fréquente suivante (disons h) et nous formons lles deux branches suivantes l'une pour h, affectéée de la fréquence de h et l'autre pour { v,p }, affectée de la fréquence somme des deux fréquences de v et p, et ainsi de suite .... Les codes lles plus longs sont donc affectés aux lettres les moins fréquentes, celles qui sont les plus basses dans l'arbre. Cet algorithme est dit "glouton" car en choisissant à chaque instant la meilleur solution du moment il évoque un goinfre qui se jette toujours sur le plus gros morceau sans réfléchir à la suite. On peut montrer que sagissant de codage cette stratégie gloutonne est aussi optimale.

Le codage de Huffman a l'avantage de donner une programmation simple. Son utilisation comme méthode de compression exige de transmettre en début de message codé l'arbre de codage , ce qui en réduit l'intérêt en cas de texte court. Remarquons que si on ne donne pas cet arbre de codage on a une méthode de cryptage de textes

D'aprés un article de Hervé Lehning HS n°12 Tangente Les Graphes

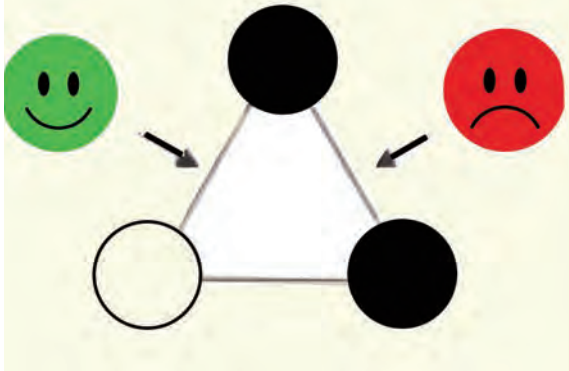
Les graphes pour communiquer



Le scientifique doit, afin de mieux décrire le monde réel, chercher constamment à en simplifier la description pour n'en garder que les propriétés pertinentes à son niveau. Ainsi le chimiste symbolise-t-il une molécule par un graphe, où les atomes sont aux nœuds et les liaisons chimiques sur les arêtes. La force de cette notation vient de ce qu'elle résume une information essentielle, la directionnalité des liaisons entre des noyaux, et les cycles formés par les atomes (comme le fameux anneau hexagonal du benzène). De même le graphe d'un circuit électrique ignore-t-il la complexité du matériau qui le compose pour ne retenir que la connexité entre ses composants.

Les arêtes d'un graphe peuvent simplement signifier une relation existante entre deux sommets, ou bien porter une information quantitative, numérique comme pour la résistance d'un élément dans un circuit électrique, ou directionnelle si les arêtes sont orientées. Le physicien peut alors, à la suite de Kirchhoff et sa célèbre loi des nœuds, prédire la circulation du courant dans le réseau électrique. Le biologiste pourra aussi coder les multiples événements qui président à la réalisation d'une fonction biologique, à travers des " réseaux métaboliques " toujours plus complexes.

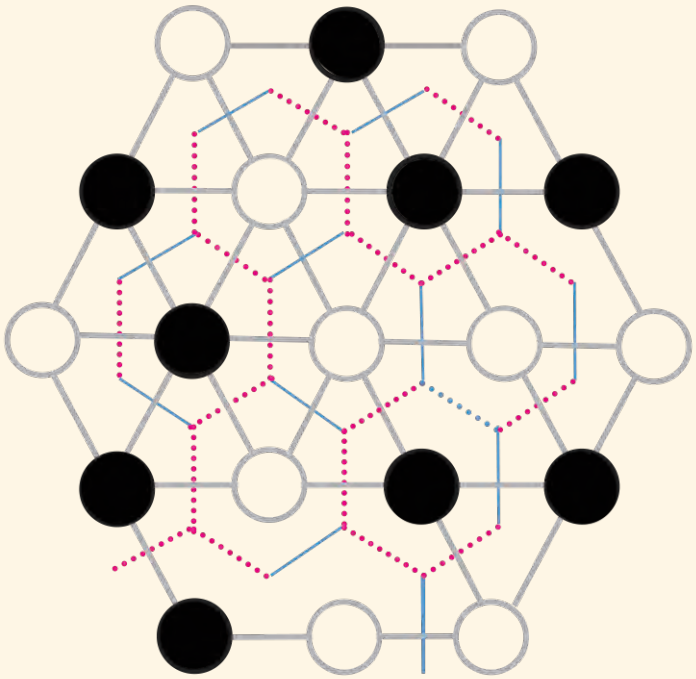
Illustrons par un exemple cet intérêt des physiciens pour les graphes, en considérant un alliage bidimensionnel (hypothétique) constitué de deux types d'atomes, A et B, dont nous supposerons qu'ils cherchent à se lier entre eux, c'est-à-dire préférer les proximités A-B plutôt que A-A et B-B. Si l'alliage est métallique, on sait que sa structure est plutôt compacte ; les atomes chercheront donc à s'assembler sur un réseau triangulaire. Or, il n'est pas possible d'alterner des atomes A et B sur un triangle .



Le cas le plus simple de « frustration », dans un alliage à deux dimensions. La solution la plus compacte correspond à des triangles équilatéraux. Mais si l'alliage abaisse son énergie en favorisant les voisinages entre atomes différents, cela ne peut être assuré pour toutes les liaisons.

Cette situation met en scène le concept, plutôt récent en physique, de « frustration », qui s'applique à la description de nombreux systèmes désordonnés. Pour chercher à minimiser son énergie, l'alliage va s'organiser de façon à maximiser le nombre de liens AB. La solution n'est pas unique, et le physicien souhaite pouvoir les énumérer toutes. On peut le faire en calculant, problème classique en théorie des graphes, le nombre de «couverture par dimères» du graphe dual.

Le dual d'un réseau triangulaire est hexagonal. La couverture par dimère consiste à sélectionner un ensemble d'arêtes du graphe, les dimères, tel que chaque sommet n'appartienne qu'à un seul dimère. A chaque configuration de dimère correspond une structure possible minimisant l'énergie de notre alliage. Notons enfin, sans la développer ici, l'utilisation massive des graphes en physique pour simplifier l'écriture et la résolution de calculs complexes. Un exemple célèbre est donné par les fameux graphes de Feynman en physique des interactions fondamentales.



Sur un réseau triangulaire, on peut minimiser le nombre de liaisons entre atomes de même nature de multiples façons, que l'on souhaite énumérer. A chaque solution correspond une «couverture par dimères» (ici en bleu) différente du pavage hexagonal dual (en pointillé rouge).

Graphes et art

Les labyrinthes

L'histoire des labyrinthes est aussi longue et tortueuse que le suggère leur tracé. On pense d'abord, bien sur, à la légende de Thésée et du Minotaure, il s'agit alors d'une construction inextricable dont l'on ne sort vivant que par la ruse.

Le Moyen Âge a repris le mythe du labyrinthe et en a décoré le sol de ses cathédrales, on pense par exemple à celui de Chartres ou d'Amiens ; traditionnellement composé de pierres noires et blanches symbolisant le bien et le mal, il représente un chemin symbolique vers le centre, vers Dieu.

Les labyrinthes furent aussi conçus comme de purs divertissements, tel le labyrinthe végétal de Hampton Court, en Angleterre, réalisé pour le roi Guillaume III en 1690. Ces labyrinthes bucoliques ont même été remis à la mode ces dernières années.
On peut se demander si ce type de symbole peut être encore un sujet d'étude en ce début de 21ème siècle ? La réponse est positive. Tout d'abord on peut penser à tous les problèmes que l'on peut se poser autour d'un labyrinthe : Comment y trouver son chemin ? Quel est le plus court chemin ? le plus long ? peut-on explorer tout le labyrinthe ? et ceci en ne passant qu'une fois et une seule partout ? Il se trouve alors que les techniques utilisées pour répondre à ces questions peuvent être exploitées dans bien d'autres domaines : la robotique bien sur, mais aussi, le monde des jeux vidéo, d'internet et ses nombreux moteurs de recherche....

En effet les labyrinthes peuvent être représentés par des graphes, les couloirs sont alors les arêtes et les carrefours sont les sommets du graphe.

Comment explorer un labyrinthe ?
Plusieurs méthodes existent mais une des plus connues est celle dite « de la main gauche » (ou droite !) Elle consiste à se déplacer en longeant constamment le mur de gauche (ou de droite) dont on vérifie la continuité avec la main. Cette méthode ne convient que pour des labyrinthes sans ilot dant le graphe est un arbre mais elle ne permet pas d'explorer les parties du labyrinthe dont l'ensemble des murs comporte des ilots.

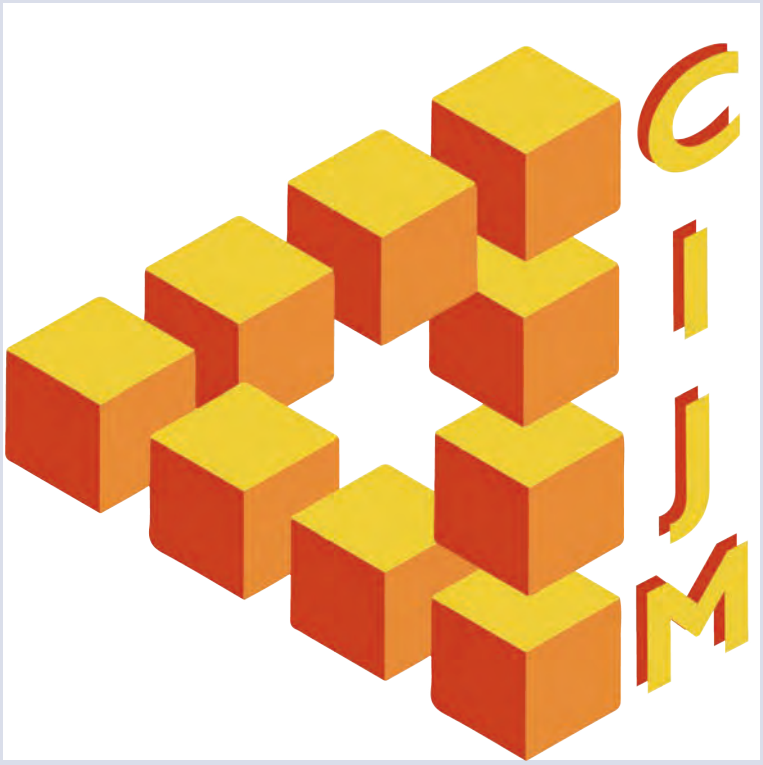
D’autres méthodes ont été proposées.

Les amateurs de récréations mathématiques aiment à évoquer le nom de ***Gaston Tarry*** (1843-1913), mathématicien français qui s’intéressa entre autres aux carrés multimagiques et attacha son nom à une méthode d’exploration systématique des labyrinthes.

Edouard Lucas dans son premier tome des «*Récréations Mathématiques*» donne une autre méthode plus nprécise qu’il attribue à M. Trémeaux, ingénieur des Télégraph.

D’après un article de Wikipédia, l'encyclopédie libre.

A votre tour , observez le plan d’un labyrinthe et construisez son graphe ....


CIJM