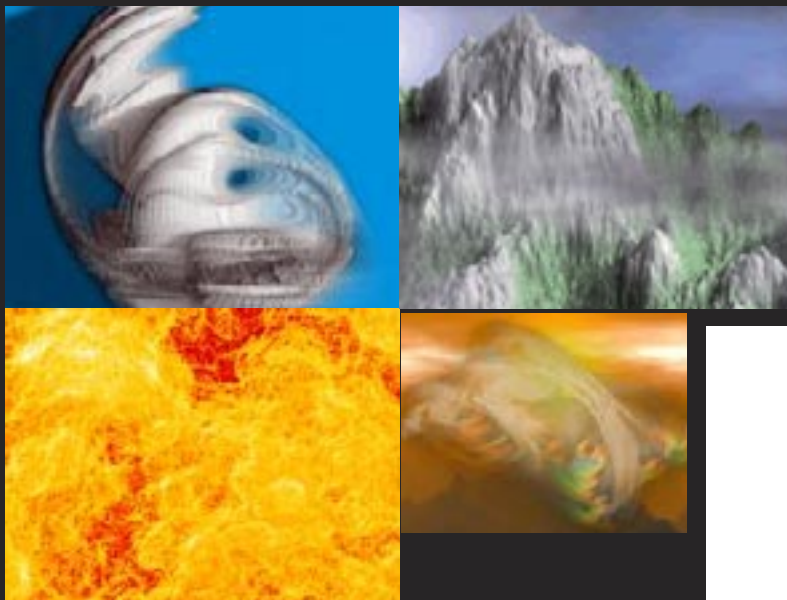


Raconte - moi les fractales



Livret pédagogique

sous la direction de
Marie José Pestel,
Présidente du CIJM

en collaboration avec
Jean François Colonna,
CMAP
Ecole Polytechnique

Réalisation

Comité International des Jeux Mathématiques

Association nationale de jeunesse
et d'éducation populaire
Association agréée par l'Éducation Nationale

CIJM - Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 PARIS Cedex 05
cijm@cijm.org
N° SIRET : 433 879 343 00047 APE 927 C

www.cijm.org



Raconte - moi les fractales

Le concept mathématique de « fractal » est utilisé depuis la seconde moitié du XX^e siècle.

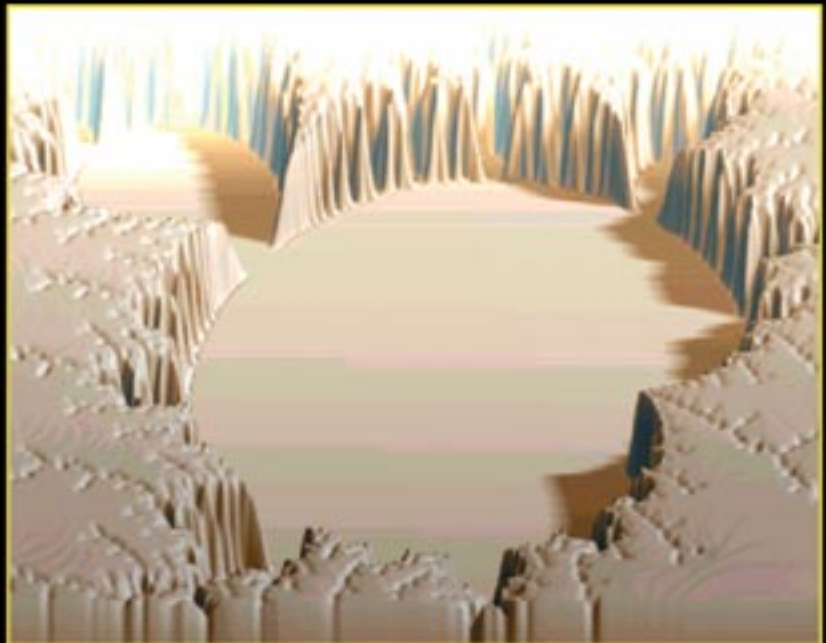
Il caractérise des objets possédant des « détails » à toutes les échelles d'observation, dont certaines mesures peuvent diverger et dont la dimension peut être non entière.

A la fin du XIX^e siècle les pères fondateurs de ce concept :

Weierstrass, Cantor, Peano, Lebesgue, Hausdorff, Besicovitch, Von Koch, Sierpinski, ...

s'intéressent à ce qu'ils considèrent comme des « monstres » que sont ces courbes continues mais sans tangente, dont la longueur est infinie dans un domaine fini.

Ces « monstres » restèrent assoupis quelques dizaines d'années jusqu'à ce que la curiosité de certains et tout particulièrement de Benoît Mandelbrot, aidée par la technologie informatique, les réveillent.



Visualisation tridimensionnelle de l'ensemble de Mandelbrot J-F Colonna

Fractales :

objets possédant
des « détails »
à toutes les échelles
d'observation.



Naissance d'une théorie mathématique



Que sont nos mathématiques ?

Jean François Colonna, chercheur au centre de mathématiques appliquées de l'Ecole Polytechnique, s'interroge :

«Elles sont sans doute le reflet de notre pensée et de nos structures cognitives profondes. Elles se sont construites au cours des siècles pour devenir un langage puissant pour décrire l'Univers que nous appréhendons.

L'adéquation notable qui existe entre mathématiques et univers provient sans doute de l'ordre qui règne autour de nous. Tout ne peut être chaos : les symétries, les régularités, les invariants, les redondances impliquent l'existence de langages les décrivant.»

Décrire la Terre fut un des premiers problèmes formels que l'Homme se soit posés. Chez les Grecs, la géométrie donne naissance à la géométrie mathématique et jette les bases de la théorie de la géométrie euclidienne.

Cette géométrie issue des grecs a merveilleusement expliqué le mouvement des planètes ; elle a rendu compte du mouvement des marées et des vagues. Cependant de nombreux phénomènes échappaient aux descriptions proposées par cette géométrie euclidienne : la distribution des étoiles, la turbulence atmosphérique et océanique mais aussi la forme des nuages, les montagnes, les arbres

Le 19^{ème} siècle voit se développer l'analyse et l'étude des fonctions. Des mathématiciens illustres : Weierstrass -un pionnier-, Cantor « *l'un des plus grands faiseurs de monstres de tous les temps* », selon Mandelbrot, Peano, Lebesgue, Hausdorff,..... s'intéressèrent quelques temps à ces « *monstres* » que leur semblent être ces fonctions continues sans dérivées qui génèrent des courbes continues sans tangentes, à la longueur infinie dans un domaine limité.

Hermite disait en 1983 : « *Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions qui n'ont pas de dérivées.* »

Notons au passage qu'en mathématiques, à chaque époque, les découvertes des nouveaux objets se sont faites dans l'hostilité ou la perplexité : citons les nombres irrationnels pour Pythagore, les nombres négatifs au 15^{ème} siècle et le siècle suivant les nombres complexes dits « *imaginaires* » pour Cardan et Bombelli.

Vers 1975, Benoît Mandelbrot, mathématicien aujourd'hui mondialement connu, s'appuyant sur « *des questions qui se posent* », comme la forme des nuages, mesurer une côte maritime, ... et utilisant ces « *monstres* » laissés dans l'oubli par ses illustres prédécesseurs, conçoit, développe et utilise une nouvelle géométrie de la nature et du chaos pour décrire des objets rugueux, poreux ou fragmentés à toutes les échelles d'observation qu'il appelle « **objet fractal** », néologisme qui vient de l'adjectif latin *fractus*, qui signifie « **irrégulier ou brisé** ».

L'histoire des fractales illustre deux voies qui conduisent à la création mathématique :

- celle des « *mathématiques pures* », démarche purement intellectuelle qui pose et résout de manière déductive des problèmes théoriques ;
- celle des « *mathématiques appliquées* », démarche plus proche des sciences expérimentales qui produit des modèles capables de rendre compte de certains aspects du réel.

La nature est-elle fractale?



Nuages légers J-F Coloana



Fougères à La Réunion G.Noufflard



La Réunion G.Noufflard

Entre l'ordre d'Euclide
et le chaos, la géométrie fractale
décrit les objets de la nature
qui sont irréguliers, rugueux,
poreux ou fragmentés à toutes
les échelles: montagne, surface
de la Lune, ciel, plantes, ...





La nature est-elle fractale ?

« Des objets naturels très divers dont beaucoup sont forts familiers, tels la Terre, le Ciel et l'Océan, sont étudiés à l'aide d'une large famille d'objets géométriques jusqu'à présents jugés ésotériques et inutilisables maisqui méritent de par leur simplicité, la diversité et l'étendue extraordinaires de leurs nouvelles applications, d'être intégrés à la géométrie élémentaire. Bien que leur étude appartienne à des sciences différentes, entre autres la géomorphologie, l'astronomie et la théorie de la turbulence, les objets naturels en question ont en commun d'être de forme extrêmement irrégulière ou interrompue. Pour les étudier, j'ai conçu, mis au point et largement utilisé une nouvelle géométrie. »

Benoît Mandelbrot « Les Objets Fractals » publié chez Flammarion - Introduction

Quelques pages plus loin Mandelbrot donne la parole à Jean Perrin et cite des passages de son livre « les Atomes » paru dès 1910 et note l'importance historique des remarques que Jean Perrin y fait au sujet de la géométrie de la nature. Pour Jean Perrin la nature est chaotique, mal représentée par l'ordre parfait des formes usuelles d'Euclide ou du calcul différentiel et elle peut faire penser à la complication des mathématiques créées par les analystes vers 1900

Écoutons Jean Perrin nous parler de sa géométrie de la nature :

« Observons, par exemple, un de ces flocons blancs qu'on obtient en salant de l'eau de savon. De loin son contour peut sembler net, mais sitôt qu'on s'approche un peu, cette netteté s'évanouit. L'œil ne réussit plus à fixer de tangente en un point : une droite qu'on serait porté à dire telle au premier abord, paraîtra aussi bien, avec un peu plus d'attention, perpendiculaire ou oblique au contour. Si on prend une loupe, un microscope, l'incertitude reste aussi grande, car chaque fois qu'on augmente le grossissement, on voit apparaître des anfractuosités nouvelles, sans jamais éprouver l'impression nette et reposante que donne, par exemple, une bille d'acier poli. En sorte que si cette bille donne une image utile de la continuité classique notre flocon peut tout aussi logiquement suggérer la notion de fonctions continues sans dérivées ».

Jean Perrin note le rapprochement entre l'incertitude à placer un plan tangent en un point du contour d'un flocon et de trouver la tangente en un point du littoral selon l'échelle de la carte que l'on utilise tout en soulignant une différence fondamentale entre la carte dessin conventionnel et donc modélisation de la réalité et le flocon ou la côte en vraie (si on la regarde de plus ou moins loin à toute échelle). Enfin il étudie la réalité expérimentale du mouvement brownien qui agite toute petite particule en suspension dans un fluide dont la direction varie follement lorsque l'on fait décroître la durée qui sépare deux instants d'observation et dont l'étude rejoint celle des fonctions sans dérivée.

« La géométrie fractale est caractérisée par deux choix : le choix de problèmes au sein du chaos de la nature... et le choix d'outils au sein des mathématiques... Progressivement mûris, ces deux choix ont créé quelque chose de nouveau : entre le domaine du chaos incontrôlé et l'ordre excessif d'Euclide, il y a désormais une nouvelle zone d'ordre fractal. »

Benoît Mandelbrot “ Les Objets Fractals ” publié chez Flammarion - Introduction

La géométrie fractale

Autosimilarité:
chacune des parties est identique
au tout à un facteur d'échelle près.

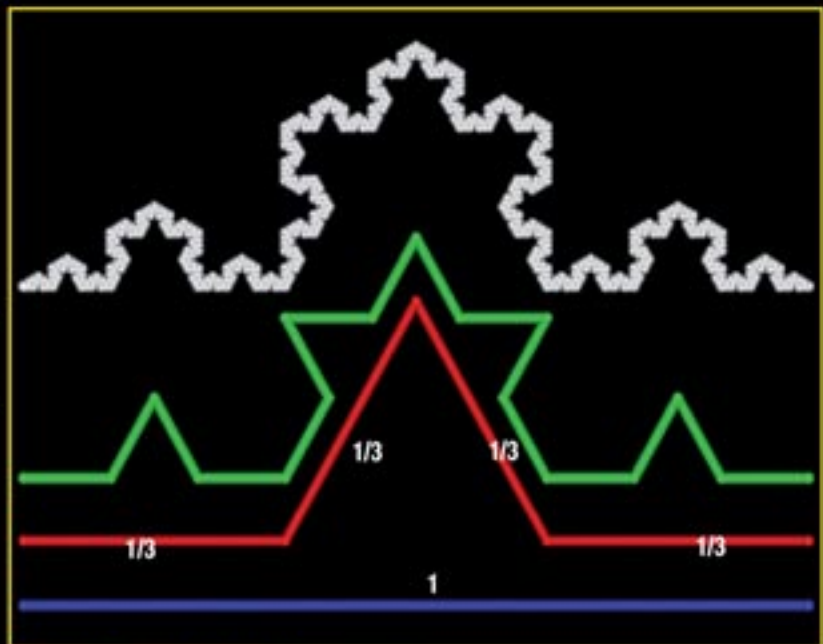
Itération:
répétition d'une action.

*Du fini à l'infini
par itération:*



A chaque étape la longueur
de la courbe de Van Koch est multipliée
par $4/3$.

En quatre-vingt-dix itérations, à partir
d'un segment d'un mètre, on obtient
une courbe dont la longueur est
supérieure à la distance Terre-Soleil
et qui pourrait se dessiner dans moins
d'un mètre carré.



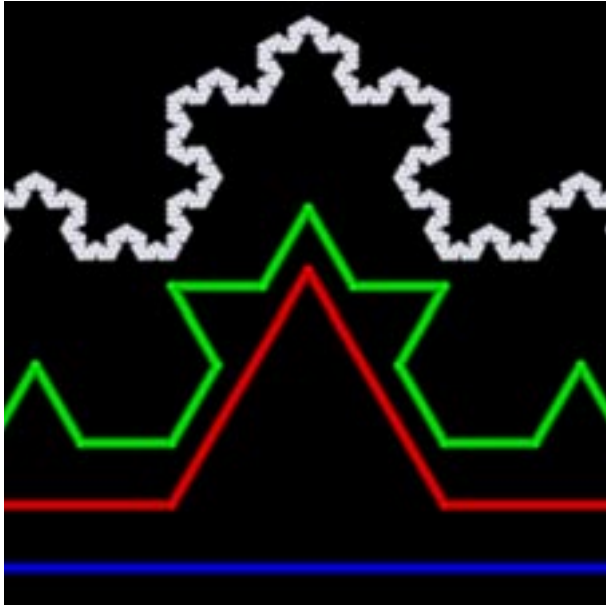
La construction de la courbe de von Koch J-F Colonna

Les figures géométriques
fractales se caractérisent
par leur autosimilarité.

Elles se construisent
par itérations successives.



La géométrie fractale



Deux aspects essentiels pour définir les objets fractals :

Des courbes continues mais sans tangente sont définies comme étant la limite à l'infini d'un certain processus de construction itératif et ne sont donc jamais visualisables exactement, mais uniquement de façon très approchée.

L'autre propriété essentielle est l'**auto similarité** : les parties sont identiques au tout à un facteur d'échelle près.

Ces deux caractéristiques des objets fractals permettent de définir leur **dimension fractale**

La dimension fractale d'un objet mesure son degré d'irrégularité et de brisure.

La géométrie élémentaire nous apprend qu'un point isolé ou un nombre fini de points constitue une figure de dimension zéro, qu'une droite ainsi que toute courbe standard au sens de la géométrie d'Euclide est de dimension un, qu'un plan est de dimension deux, qu'un cube est de dimension trois. La géométrie fractale s'appuie sur des dimensions fractionnaires, intermédiaires entre les dimensions entières .

Si on cherche à définir la dimension de certaines figures fractales, on peut d'abord penser qu'une figure dont la dimension est entre un et deux doit être un «intermédiaire» entre une droite et un plan et que, plus sa dimension est proche de deux, plus elle devrait avoir tendance à «remplir le plan».

Dimension fractale $d = \ln n / \ln (r)$ n est le nombre de sous figures
 r est le rapport de réduction (d'homothétie)

Approche naïve de la dimension fractale

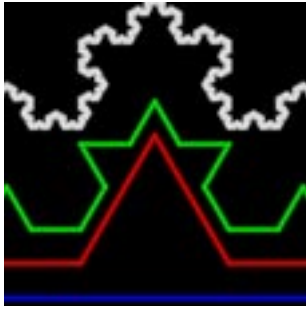
Un segment de droite peut être recouvert par 2 segments de droite. Chaque segment étant 2 fois plus petit que le segment initial, on a $2 = 2^1$;
 un segment de droite est de «dimension» 1.

On peut remplir un carré par 4 carrés. Chaque carré étant 2 fois plus petit que le carré initial, on a $4 = 2^2$;
 un carré est de «dimension» 2.

On peut remplir un cube par 8 cubes. Chaque cube étant 2 fois plus petit que le cube initial, on a $8 = 2^3$;
 un cube est de «dimension» 3

Si un objet peut être rempli par « n » copies de lui-même, « r » fois plus petites que l'objet initial, (r est le rapport de réduction)

il est de «dimension» d vérifiant $n = r^d$ soit $\ln n = \ln r^d$ donc $d = \ln n / \ln r$



La géométrie fractale

Fractale déterministe
et

Fractale aléatoire

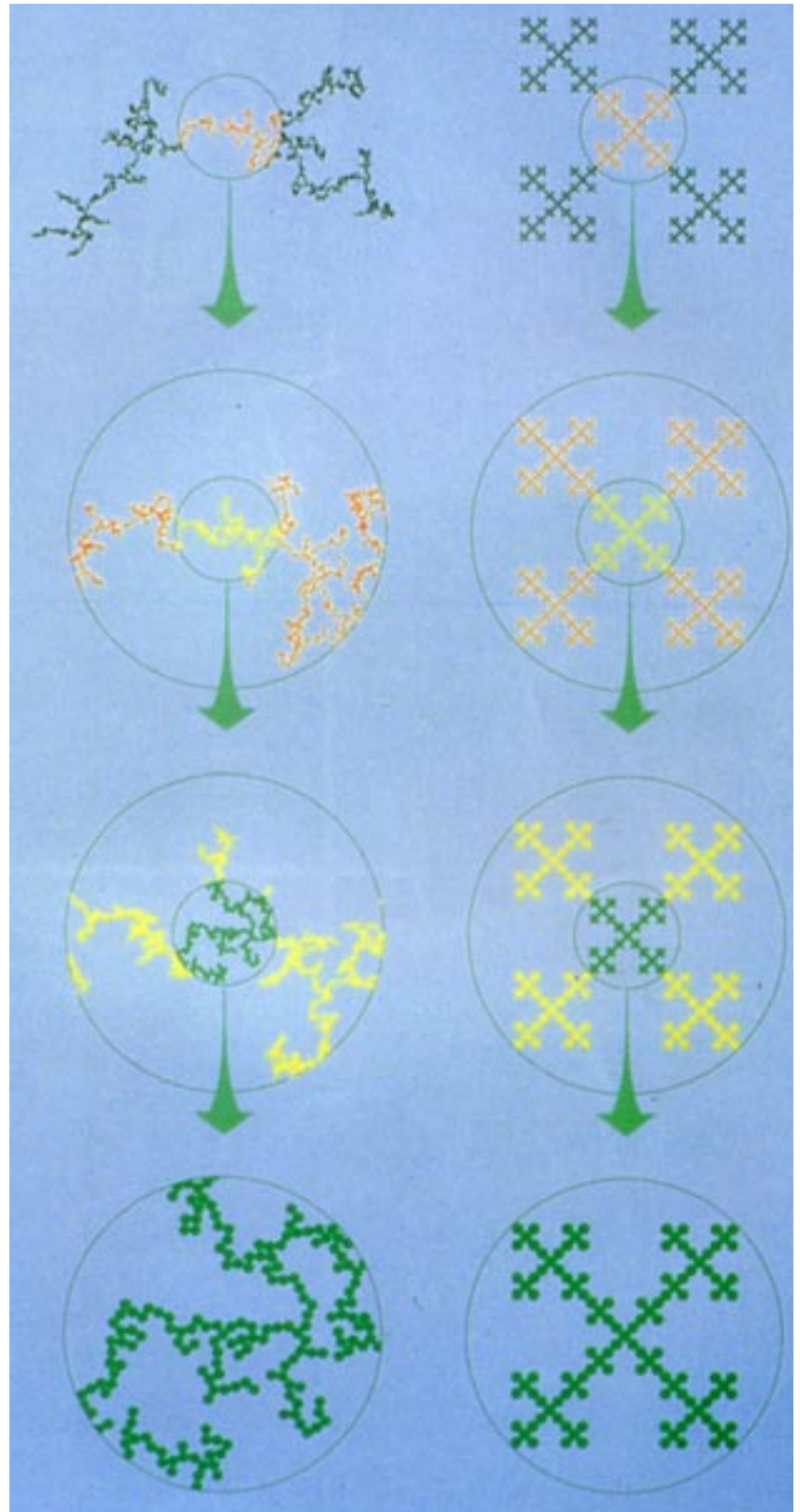
Sur ces deux séries de dessins on remarque la propriété fondamentale des fractales

à savoir

la permanence des images par une dilatation

A droite, pour la fractale non aléatoire la superposition est exacte

A gauche, pour la fractale aléatoire la similitude existe en moyenne



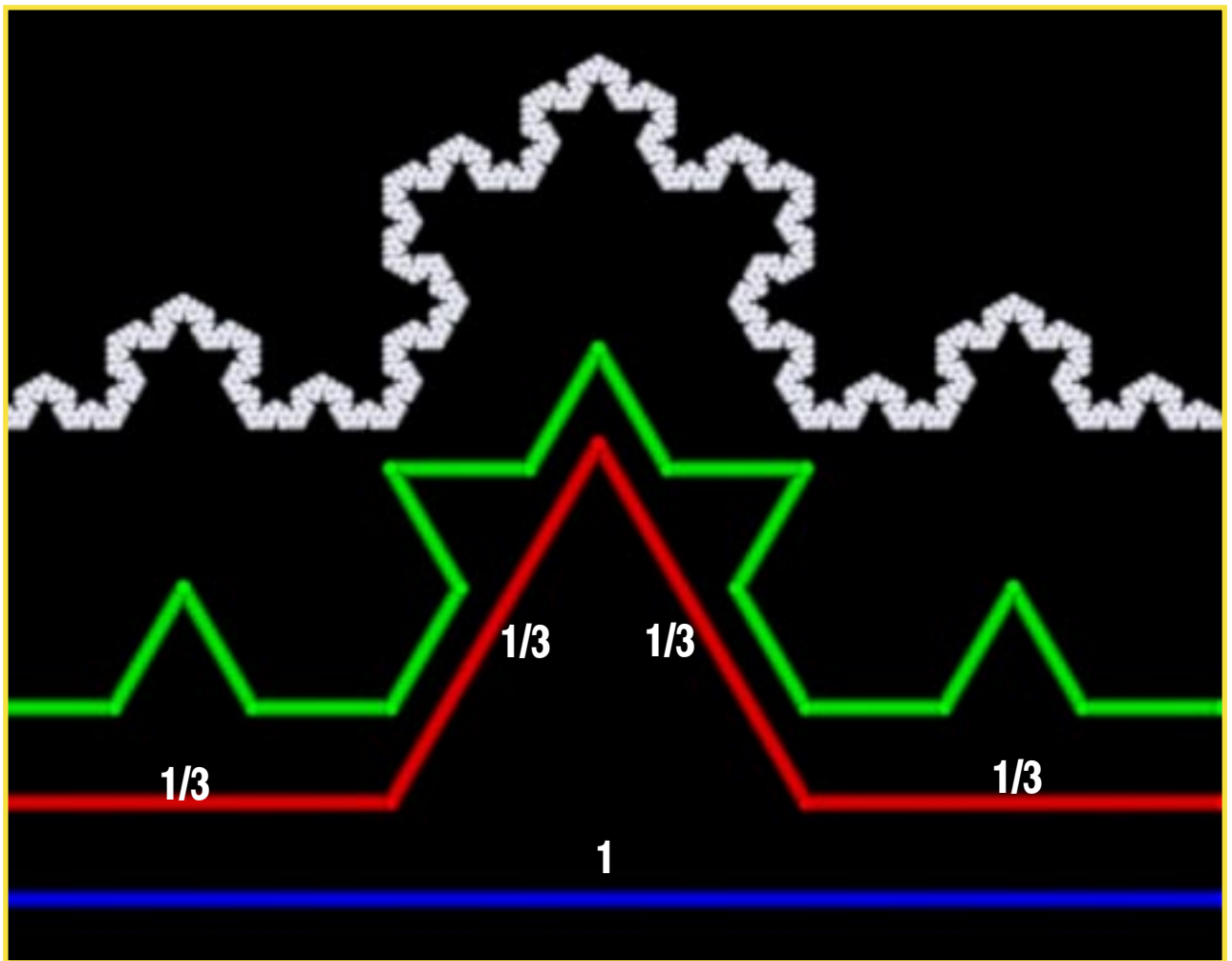
La géométrie fractale

Quelques exemples et leur dimension fractale

Courbe de Van Koch

Sur le panneau les 2 premières itérations de sa construction et, en blanc, une itération lointaine. A chaque itération on obtient à partir d'un segment, quatre petits segments ($n = 4$) dans le rapport de réduction de 3 ($r = 3$).

$$d = \ln 4 / \ln 3$$



Poussière de Cantor

L'ensemble de Cantor est fabriqué à partir d'un segment dont on enlève le tiers central ($n = 2$) et on garde les petits segments ($r = 3$). La répétition à l'infini de l'opération aboutit à une poussière de "points" dont la somme des longueurs tend néanmoins vers zéro. $d = \ln 2 / \ln 3$

C'est un modèle mathématique de l'intermittence.





La géométrie fractale

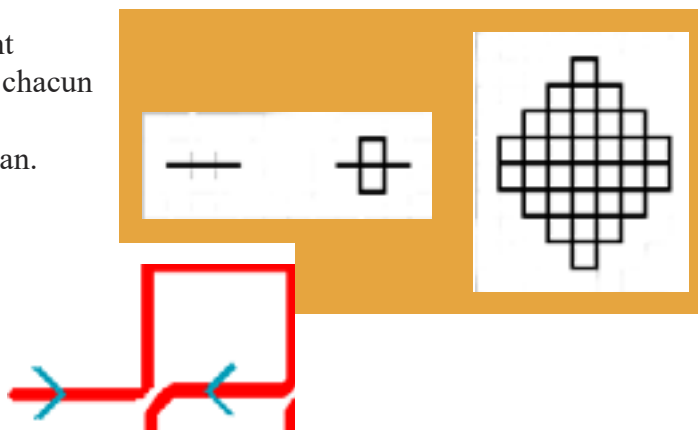
Courbe de Péano

Elle est obtenue en substituant sur un segment la figure composée de 9 segments ($n = 9$) chacun dans le rapport de réduction de 3 ($r = 3$).

Par réitérations successives, elle remplit le plan.

$$d = \ln 9 / \ln 3 ; d = 2$$

C'est un modèle possible d'organisation de transport de substance.



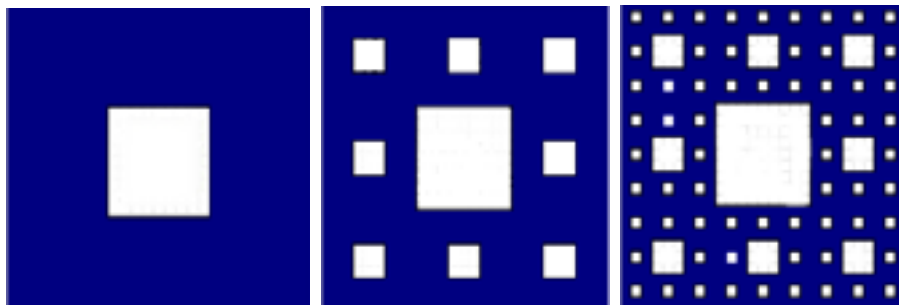
Tapis de Sierpinski

Il s'obtient en divisant le carré en neuf carrés plus petits et égaux ($r = 3$) et en enlevant le carré central ($n = 8$).

La surface du tapis tend vers zéro alors que la longueur du contour des carrés vides est infinie.

$$d = \ln 8 / \ln 3$$

Ce tapis fait penser à la coupe d'un matériau poreux



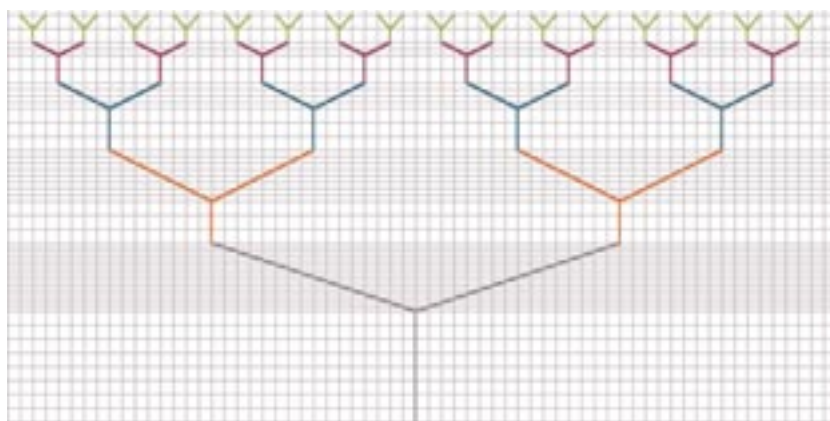
Croissance fractale

La forme de cet arbre résulte de la répétition d'un processus simple illustré par la figure suivante.

($n = 2$) dans un rapport de réduction de 2 ($r = 2$)

$$d = \ln 2 / \ln 2 ; d = 1$$

On peut modéliser ainsi la croissance de certains végétaux, la fracture d'un métal, l'érosion d'un sol par écoulement d'eau, la forme d'un éclair.



La nature connaît les fractales



Poumons Brompton Hospital / Fluent Heart



Corail *Smittina cervicornis*
J.G. Harmelin - Centre d'Océanologie de Marseille



Chêne M-L Momas

*La droite est de dimension 1,
le plan est de dimension 2...*

*La **dimension fractale** est un nombre,
pas forcément entier, qui mesure
le degré d'irrégularité de l'objet
et la façon dont il remplit l'espace.*

*La dimension de la courbe de Van Koch
est de $(\ln 4) / (\ln 3)$ soit environ 1,26.*

Pour optimiser certains échanges
Dame Nature sait faire tenir
une surface maximale
dans un volume minimal.

Par exemple, sans une telle organisation, l'être
humain pour pouvoir respirer devrait posséder
une cage thoracique de 6 m de diamètre...





Corail *Smittina cervicornis*
J.G. Harmelin - Centre d'Océanologie de Marseille

La nature connaît les fractales

Pourquoi ? Comment ?

L'**autosimilarité** semble être une propriété de très nombreux objets naturels : un nuage, une montagne, ... Regardons une branche de fougère : la forme de l'un de ses détails est très proche de celle de la branche entière. Nous nous contenterons ici de cette propriété pour définir un objet fractal.

La question se pose de savoir pourquoi tant d'objets naturels sont fractals ?

On peut rapprocher les formes fabriquées par des algorithmes fractals comme celui définissant la courbe de van Koch, à des structures que l'on retrouve dans des organismes vivants : arbres, plantes, algues....On peut ainsi comparer la formation des bronches ou le système veineux des reins à la pousse des arbres. Dans le cas des bronches on peut compter jusqu'à 16 étapes, dans le cas des veines 23 étapes

On sait calculer le flux à travers une membrane de perméabilité donnée. Le réseau très irrégulier des échangeurs fractals donne des surfaces d'échange très grande et permet aux échanges d'être moins sensibles aux modifications de l'environnement, par exemple les racines des plantes à la sécheresse...

En étudiant la géométrie fractale et en cherchant à modéliser de nombreux phénomènes physiques on pourra rapprocher la géométrie des éclairs et de la foudre au phénomène de croissance des agrégats de particules que l'on observe par exemple dans le cas d'injection d'eau dans le plâtre.

Les fractales sont sans conteste un merveilleux outil pour comprendre de nombreux phénomènes de la nature.

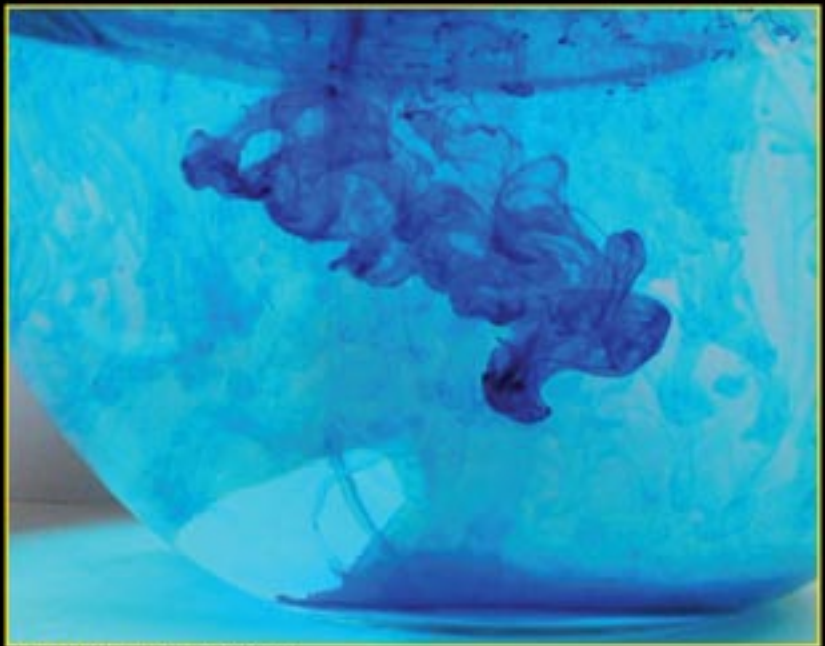
Ainsi, la géométrie fractale de la coquille du *Cymbioma Innexa* ouvre-t-elle un lien entre les mathématiques et le monde naturel.



Le mouvement est-il **fractal** ?



Mouvements d'eau sur le sable B. Dussoucheud



Diffusion d'encre dans l'eau M-L. Moreau



Eclairs

Diffusion, percolation, évolution
des cours de la bourse, autant
de phénomènes qui peuvent être
écrits en langage fractal.





Des évolutions fractales

Les processus de croissance irrégulière se trouvent partout autour de nous : arbres, éclairs, filtres à café...

Dès les années 1980, on a cherché à étudier les problèmes d'agrégation ou de " collage " d'objets. On veut décrire et modéliser les problèmes de diffusion.

On a pu représenter de façon schématisée et programmer les phénomènes d'agrégation limitée par diffusion. On obtient des images de diffusion donnant une vue saisissante de " l'universalité des fractales ".

Exemples de diffusion



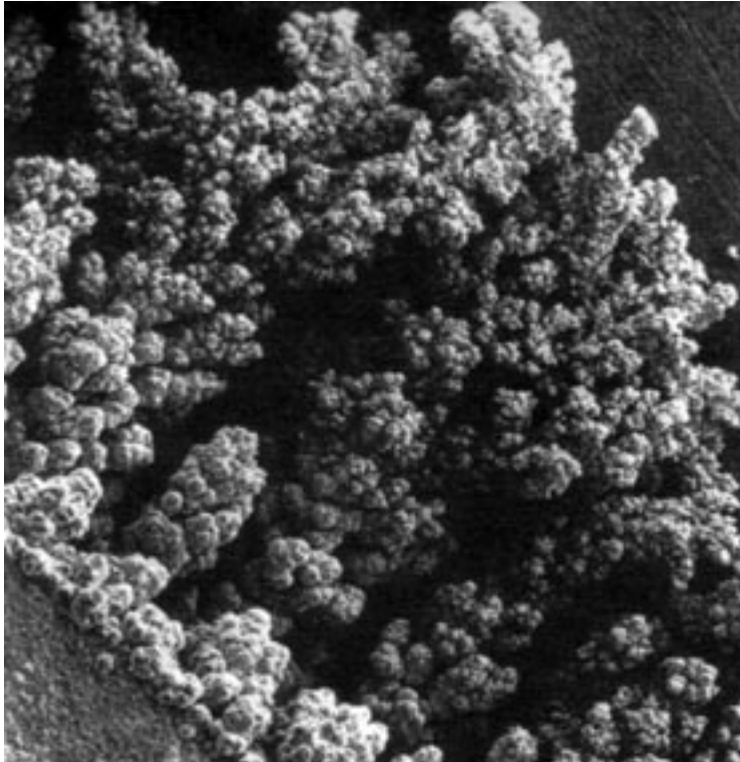
Injection d'eau dans du plâtre
(photo G.DACCORD, Saint-Etienne)



Dépôt spontané d'argent à partir d'une solution de nitrate d'argent.
(photo A.KUHN, Bordeaux)



Des évolutions fractales

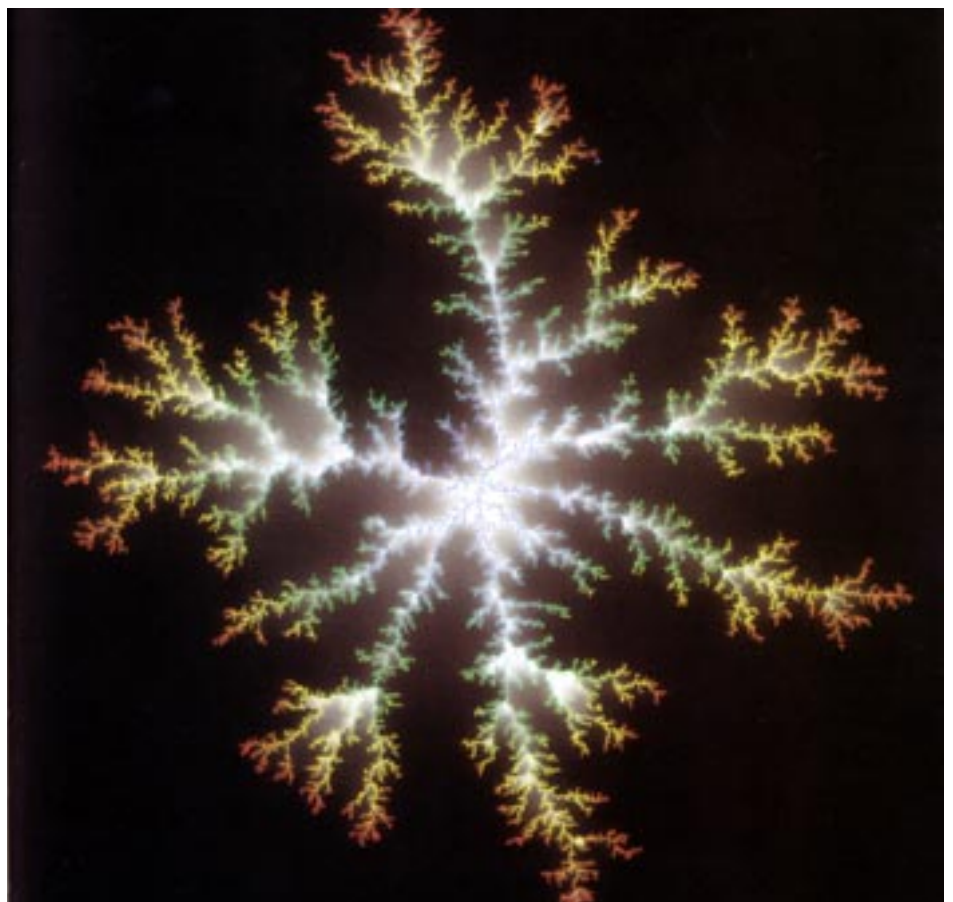


Arborescences de cuivre

(photo V.HUTTEL, Ecole Polytechnique)

Représentation colorée de la
dynamique de la croissance
dans l'Agrégation Limitée
par la Diffusion

(photo Mandelbrot et
Evertsz)



Trajectoire chaotique des **particules**

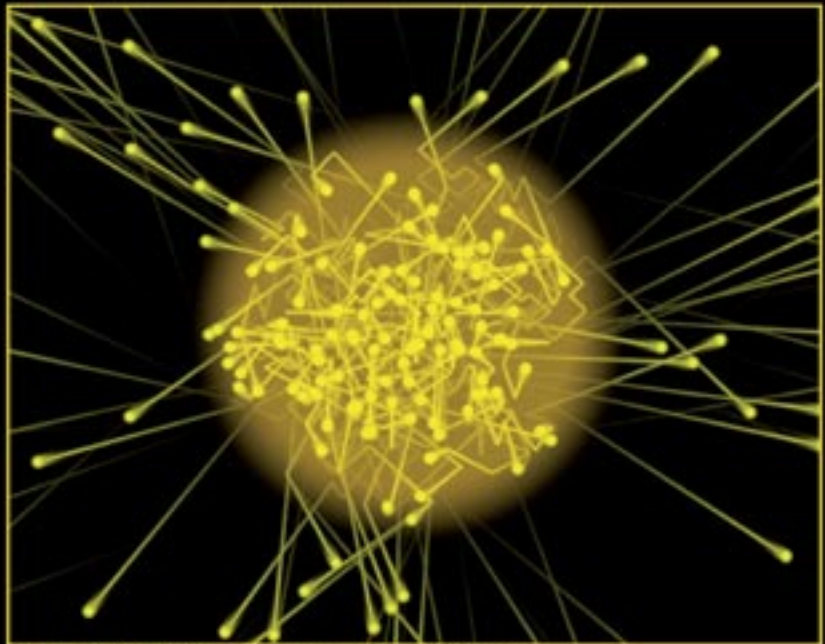
Le mouvement brownien est une suite de tous petits déplacements aléatoires, indépendants et isotropes, c'est à dire ayant la même probabilité de se produire dans toutes les directions.

La théorie physique du mouvement brownien fut élaborée entre 1905 et 1910 par Einstein, Langevin, Perrin.

Son côté mathématique ne fut développé que plus tard vers 1920 par Wiener puis Lévy.

Le déplacement aléatoire des particules est un mouvement brownien, créant des irrégularités qui peuvent être décrites par la géométrie fractale.

Il devient alors possible de modéliser un hasard.

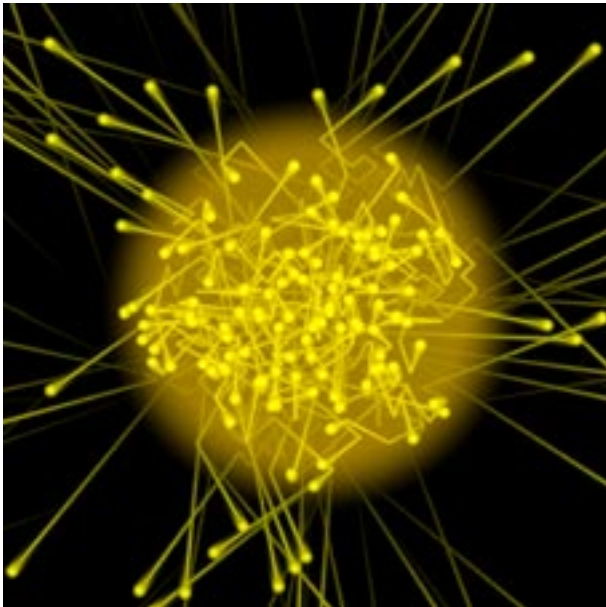


Marche aléatoire des photons produits au cœur du Soleil J-F Colonna

*« Il ne faut pas sous estimer
la possibilité du hasard
d'engendrer des irrégularités
et même des monstres »*

Jean Perrin

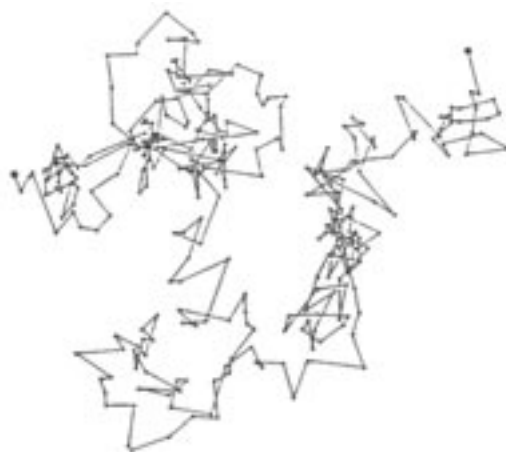




Trajectoire chaotique de particules

Les fractales apparaissent dans de nombreux phénomènes liés au hasard.

Pour illustrer un **mouvement brownien** on peut considérer le déplacement d'un objet ponctuel qui fait à chaque instant un saut dans une direction dictée par le hasard et d'une longueur quasiment constante ; il est soumis à une loi probabiliste. Traditionnellement on imagine la marche d'un homme ivre, un pas à droite, en avant, à gauche, en arrière... On photographie cette trajectoire et on compare ces photos prises tous les 10, 100, 1000 ou 10 000 pas. Ces trajectoires se ressemblent. Elles sont en moyenne les mêmes à une dilatation près. On peut parler de courbes fractales dont la dimension dans ce cas vaut 2.



Mouvement d'une trajectoire brownienne observée et dessinée par Jean Perrin

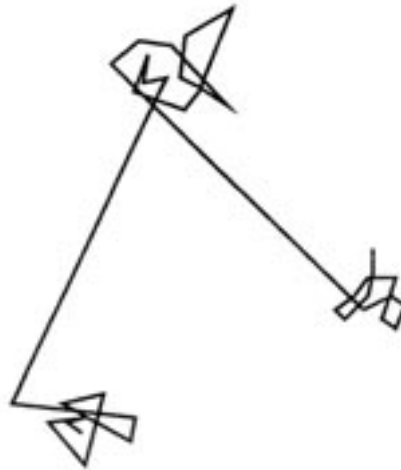


Exemple de trajectoire brownienne sur 20000 pas, calculée par ordinateur

Trajectoire chaotique de particules

Nombreux sont les phénomènes naturels de marche au hasard de ce type : les trajectoires des molécules d'un gaz ou d'un liquide soumises à l'agitation thermique. On est au cœur des problèmes de diffusion. De tels mouvements existent au sein même des solides et sont d'autant plus importants que l'on élève la température. En faisant de la modélisation de phénomènes de soudure on rencontre aussi des problèmes de cette nature.

Le mathématicien français Paul Lévy (1886- 1971) a étudié dans les années 30 des processus aléatoires qui sont une variante fondamentale des mouvements browniens : les longueurs des déplacements ne sont plus quasiment constants et des grands sauts sont permis même avec une probabilité très faible. Une représentation de ce type de mouvement est donnée par le vol d'un albatros plongeant pour attraper sa proie.



Il y a une dizaine d'années ce type de modèle permettait de décrire certains flux bancaires en incluant le risque de crash.

Aujourd'hui d'autres modèles sont employés.

Les fractales au service de la nature

MONTAGNE
TERRE
MER...

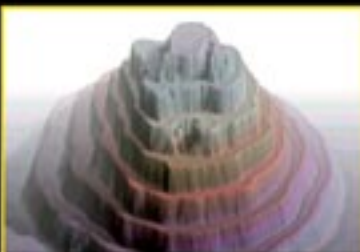
modéliser l'évolution d'un relief



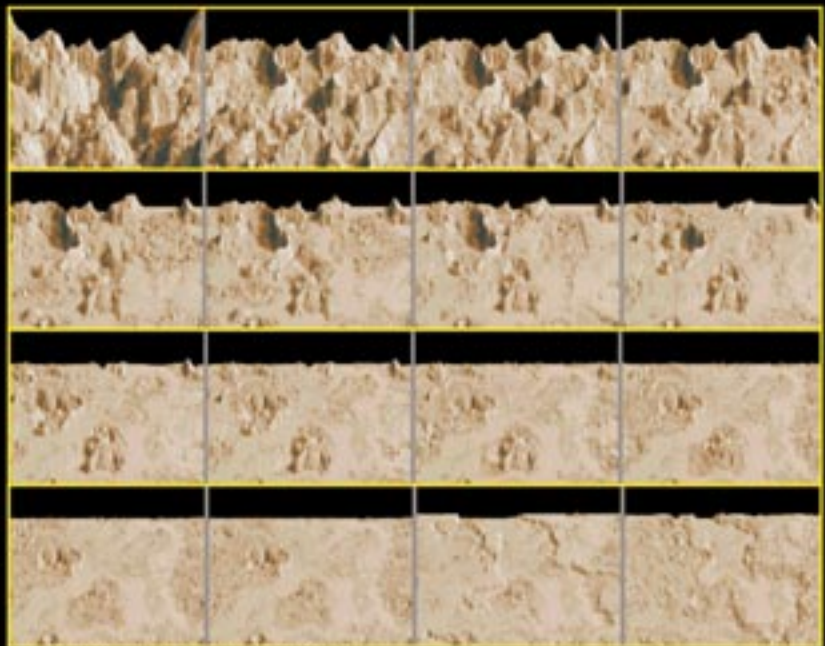
Paysage lunaire J-F Colonna



paysage de montagne J-F Colonna



Tour de Babel J-F Colonna



Evolution à long terme d'un paysage J-F Colonna

Modéliser les phénomènes naturels pour **prévoir**, telle est la possibilité offerte par l'ordinateur en mettant en œuvre les formules qui définissent les fractales.



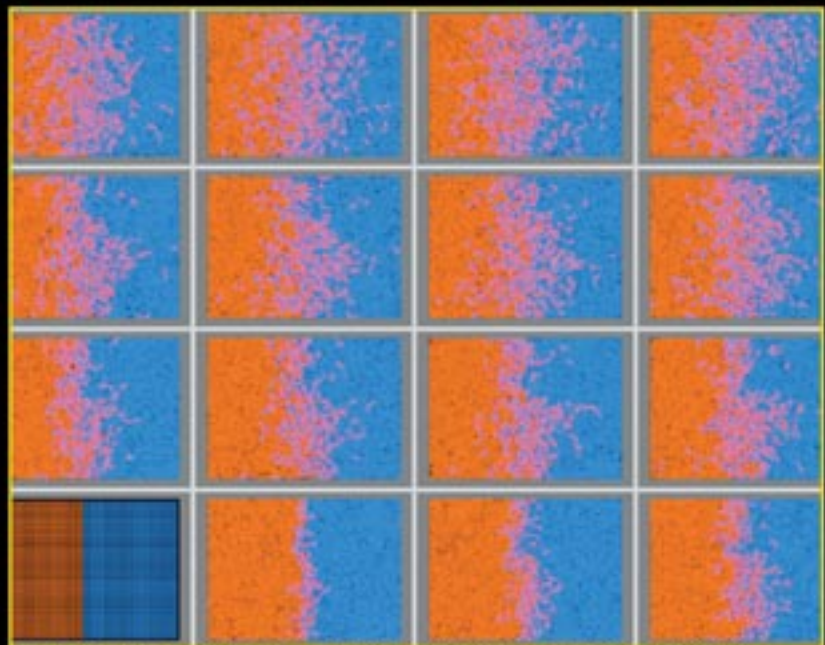
Les fractales au service de la technique

L'utilisation des fractales permet de mieux comprendre les interactions entre deux métaux en fusion, par exemple lors d'une soudure.

Les fractales permettent l'étude de la propagation des incendies, rendant ainsi plus efficace la lutte contre les feux de forêt.



Agrégat fractal bidimensionnel avec une dimension fractale variable allant en augmentant du premier au dernier plan J-F Colonna

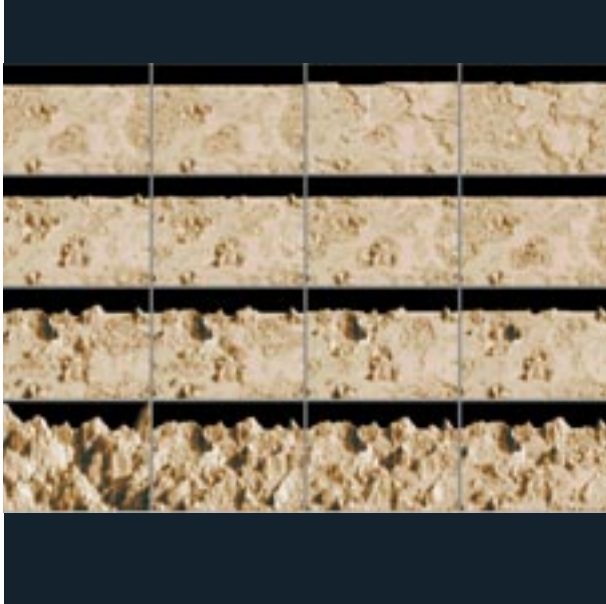


Agrégats fractals bidimensionnels obtenus grâce à des particules identiques en interaction J-F Colonna

Modéliser pour améliorer :

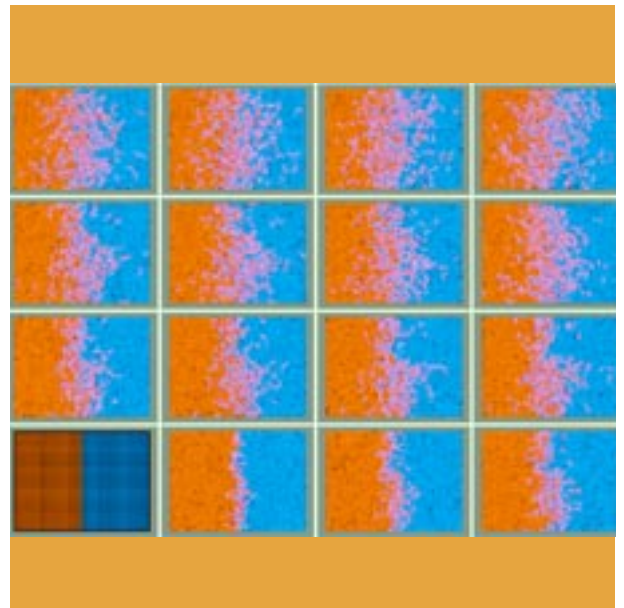
percolation, dissolution,
soudure, peuvent être
améliorées si on les modélise
par des fractales.





Les fractales au “service” de la nature

Les fractales au service de la technique



« L'application la plus directe et la plus simple de la géométrie fractale est la caractérisation et la mesure de l'irrégularité lorsque celle ci possède une propriété d'auto-similarité ou d'auto-affinité sur une échelle suffisante ».

Universalités et fractales - SAPOVAL- Flammarion

« Ces utilisations sont semi-empiriques car on peut ignorer pourquoi telle ou telle géométrie est fractale ou ne pas comprendre en quoi la fractalité est efficace et néanmoins trouver profitable de l'utiliser » .

Universalités et fractales - SAPOVAL- Flammarion

Ces utilisations se retrouvent aussi bien pour décrire des phénomènes naturels que pour mettre au point des techniques industrielles au service de l'homme ou de la nature :

- caractérisation des agrégats de carbone qui servent à définir les meilleurs pneumatiques possibles ;
- rugosité de certains papiers, taille de grains dans les poudres ;
- électrodes self-similaires ;
- compression des images....

Les fractales au service de la nature

Les fractales constituent de part leur universalité un merveilleux outil de classement des phénomènes.

L'étude de la percolation peut être utilisée dans de nombreuses situations différentes.

Du front de diffusion au rivage marin, les ingénieurs qui bâtissent des digues pour amortir les effets des vagues utilisent la géométrie fractale et ont des problèmes à résoudre qui rejoignent ceux qui luttent contre le bruit.

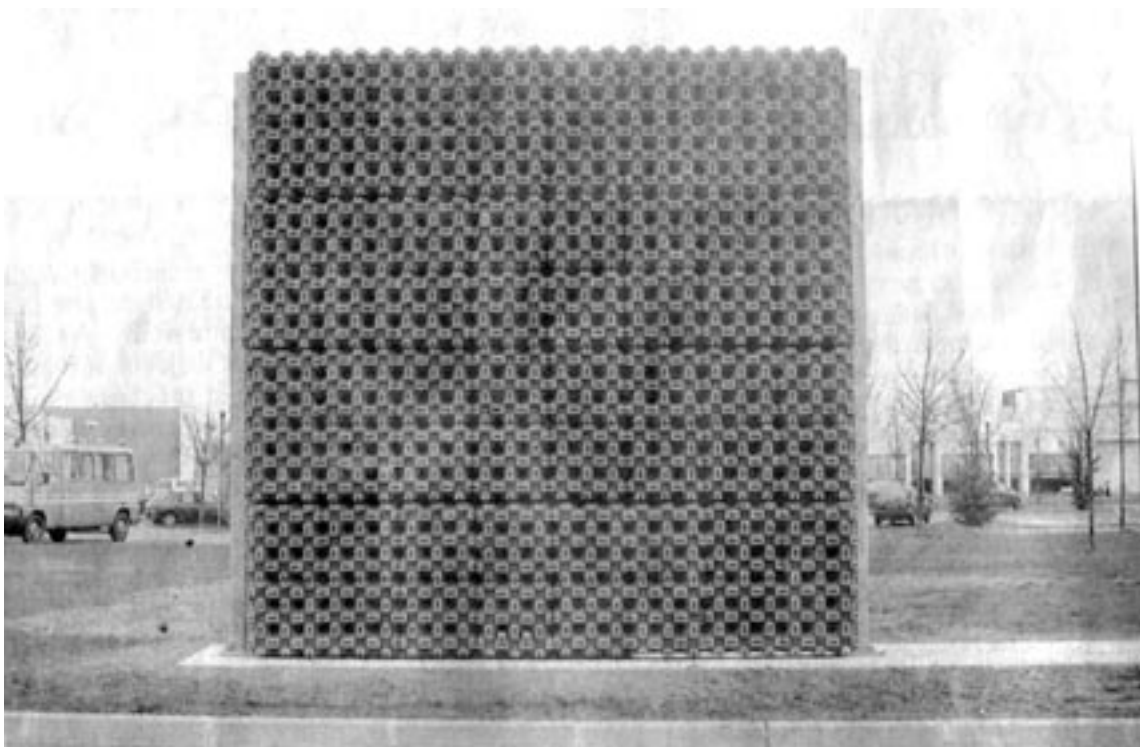
Le phénomène de gélification est fréquent dans la nature et même dans la cuisine (le blanc d'œuf, les gelées,)

Les chimistes sont capables de fabriquer des structures extrêmement diluées, des matériaux ultra légers, des aérogels qui ont une structure fractale microscopique.

Une des propriétés les plus intéressantes des aérogels est leur extraordinaire pouvoir d'isolation thermique et ce pouvoir peut s'expliquer par la nature fractale de ces objets. Une autre raison de s'intéresser aux objets irréguliers est leur pouvoir d'amortir les vibrations

De la recherche aux applications

Dans des articles récents de la presse quotidienne, Le Monde du 12 juillet 2003 et Le Figaro du 24 juillet 2003 , on peut lire le contre rendu d'une application de fractales à la lutte contre le bruit, travaux menés dans des laboratoires de l'école Polytechnique par Bernard Sapoval et ses collaborateurs et exploités par la société Colas.



ce prototype de mur anti-bruit construit par Somaro filiale du groupe Colas, permet de réduire les nuisances sonores de 17 décibels

photo Le Figaro

Les mathématiques des fractales luttent contre le bruit

Un mur acoustique mis au point par un laboratoire de l'Ecole polytechnique et la société Colas permet de réduire de façon importante les sons engendrés par la route et le rail grâce à ses motifs dentelés

« NOUS N'AVONS malheureusement pas de pistolet. » Au pied de son mur antibruit, Didier Peyrard, directeur technique de la société Somar, filiale du géant de la construction routière Colas, ne peut paraître sa démonstration. Les creux et pyramides moulés dans ce panneau de béton de bois sont censés absorber les sons de façon inégale. Mais l'écran de 4 mètres de côté érigé sur le parking du centre de recherche de l'industriel, dans les Yvelines, ne permet pas à une oreille profane de faire la différence.

Les mesures effectuées en relation avec le laboratoire de physique que condense de l'Ecole polytechnique sont pourtant formelles : ces pleins et ces déliés absorbent les basses fréquences avec une efficacité de 68 %, plus élevée que celle d'un mur classique. Et le fameux test du pistolet, standardisé, a bien montré que la réflexion des ondes sonores était diminuée de 8 décibels acoustiques (dB(A) -), tandis que la transmission - les sons capables de traverser l'écran - était réduite de 57 dB(A).

Vers des pneus et chaussées plus silencieux

Les pouvoirs publics ont engagé un programme visant à résorber d'ici à 2010 les quelque 3 000 points noirs où le bruit causé par la circulation routière ou ferroviaire dépasse les 65 décibels acoustiques (dB(A) -), seuil de fatigue pour l'homme. Les solutions sont très diverses : couverture des routes, édiculation de murs, utilisation de revêtements spéciaux, emploi de double vitrage, etc. La réduction à la source a déjà eu un effet drastique : un poids lourd des années 1970 émettait autant de bruit que dix poids lourds actuels. Mais à partir de 50 km/h, les bruits de roulement dépassent ceux émis par le moteur des véhicules légers. Certaines recherches se concentrent sur leur réduction : les sculptures des pneumatiques devraient permettre de gagner de l'ordre de 3 dB(A), soit une réduction de moitié. L'ajout de caoutchouc sur la chaussée, sous la forme de « poudrette » incluse dans les enrobés, permet des gains sonores du même ordre. La prochaine génération, promet-on chez Colas, jouera sur la complémentarité avec les murs antibruit et devrait offrir une nouvelle mesure de 3 dB(A).

AUGMENTER LA SURFACE POUR PIÉGER LES ONDES SONORES



Un mur prototype de 4 mètres de côté

Photos : Colas

■ L'écran antibruit mis au point par Colas et le laboratoire de physique des matériaux condensés de Polytechnique met à profit le principe physique selon lequel l'absorption phonique est proportionnelle à la surface développée offerte au contact des ondes sonores. Les formes fractales, qui présentent des motifs identiques à différentes échelles, ont inspiré la forme, faite de creux et de bosses, du mur constitué de béton de bois.

On mesure mieux les progrès obtenus lorsque l'on sait que les mesures de bruit se faisant à partir d'une échelle logarithmique, cela signifie qu'une diminution de 3 dB(A) correspond à une réduction de moitié du volume sonore perçu par l'oreille humaine. Au total, résume Jean-Luc Gautier, chef du projet mur antibruit chez Colas, les simulations numériques indiquent que, pour un riverain, le mur permettrait de réduire de

2,7 dB(A) la nuisance occasionnée par le trafic routier, « soit 45 % de mieux que les meilleurs matériaux actuels ».

Cette performance tient en un concept un peu passé de mode, les fractales, qui désignent des formes géométriques ayant la faculté de se reproduire à l'identique à différentes échelles. Les branches du chou-fleur ou de l'arbre bronchique, tout comme la découpe du littoral en sont des exemples fournis par la nature, avant que les mathématiciens - dont le Français Benoît Mandelbrot - ne formalisent des fonctions reproduisant des motifs similaires.

En acoustique, « nous sommes partis du principe que l'absorption sonore serait proportionnelle à la surface développée au contact des ondes sonores », explique Bernard Sapoval, co-inventeur du procédé et chercheur au laboratoire de physique condensée de Polytechnique. Les fractales offrent justement la particularité d'accroître la surface de contact. Tout comme le contour d'une côte rocheuse est virtuellement de longueur infi-

nit, si on se donne pour objet de le suivre à l'échelle du grain de sable et non à celle de la carte routière.

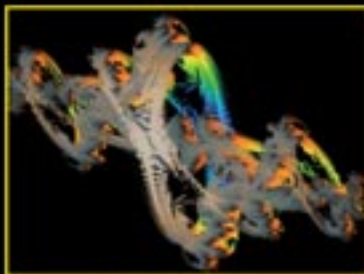
Le chercheur a testé cette hypothèse sur de petites chambres d'engrènement où étaient disposés des obstacles d'irrégularité croissante. « Les mesures ont confirmé l'intuition de départ. Une salle de concert fractale serait très mauvaise », indique Bernard Sapoval, qui voit dans l'utilisation de ces structures irrégulières une généralisation théorique, du fait que les chambres anéchoïques, conçues pour museler les ondes sonores, fonctionnent mieux lorsque les murs de pyramide de mousse qui les tapissent sont irréguliers. « L'énergie est concentrée à l'endroit où elle est absorbée, ce qui renvoie au concept de localisation faible en physique », indique le chercheur.

Le rôle des irrégularités géométriques dans l'absorption sonore est confirmé par Franck Spard, du Laboratoire des sciences de l'habi-

Hervé Morin

Ordinateurs et fractales

Après la géométrie sans image de Laplace et Lagrange et le règne de la mathématique pure sans support extérieur, l'avènement de l'ordinateur permet bien des avancées scientifiques comme la géométrie fractale.

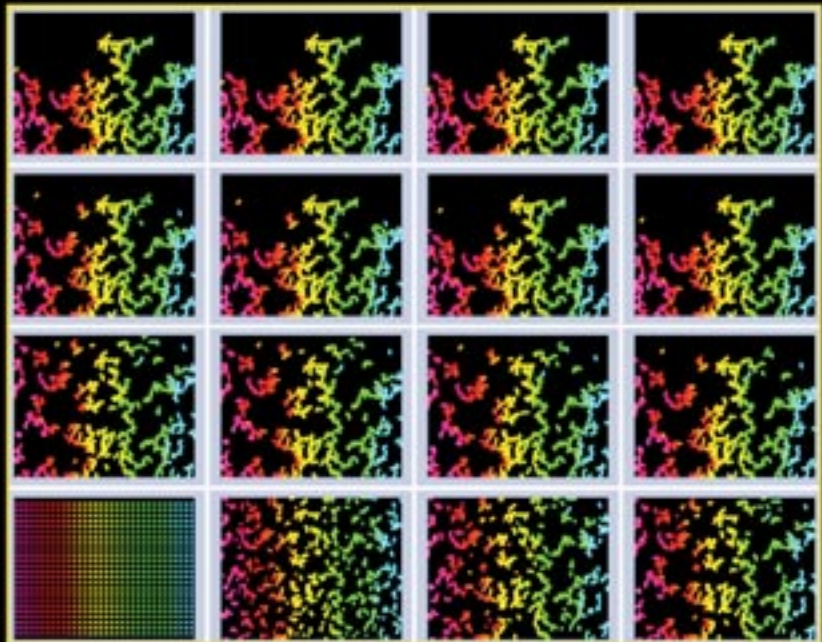


Un ensemble de Julia dans le corps des quaternions J-F Colonna

Le scientifique qui travaille dans ce domaine de grande complexité doit non seulement maîtriser la théorie mais aussi, être particulièrement attentif aux limites de l'outil informatique.

La géométrie fractale traite d'objets très irréguliers mais continus, par exemple des courbes qui n'ont pas de tangentes.

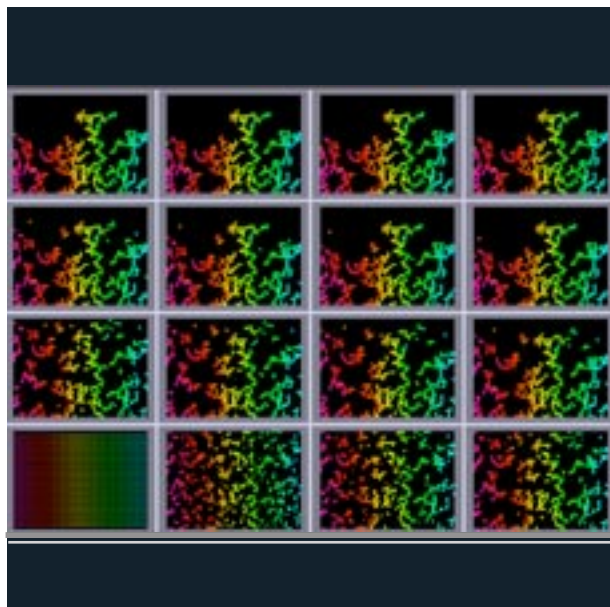
L'ordinateur lui ne traite que de phénomènes discrets (il ne connaît pas la continuité et ignore les nombres réels). Alors gare aux erreurs ...



Agrégats fractals bidimensionnels obtenus par collage de 100% des particules lors de leurs collisions, dans un champ de gravitation vertical J-F Colonna

Par itération, le simple
peut engendrer
du complexe.





Ordinateurs et Fractales

Vous l'avez compris, la géométrie fractale est l'antithèse de cette mathématique sans image dont se vantaient, il y a deux siècles, les mathématiciens Lagrange et Laplace et qui a failli triompher jusque dans nos collèges et lycées sous le nom de « mathématiques modernes ». La géométrie fractale fut l'un des moteurs qui lutta contre les iconoclastes. Puisque « l'outil fait l'homme » et que « l'instrument fait la science », la géométrie fractale

est née d'un très vieil instrument, l'oeil, enfin réhabilité et d'un tout nouveau, l'ordinateur.

Le rôle de l'ordinateur dans le développement des géométries fractales est fondamental.

Il serait impossible de calculer ces objets itératifs sans l'aide de l'ordinateur.

Ainsi la physique des fractales s'est construite en même temps que les possibilités de calcul numérique sur les ordinateurs, dans les années 80, se développaient.

L'ordinateur et la géométrie fractale s'allient pour produire des images de synthèse saisissantes de réalisme.

Pour fabriquer un image numérique d'un relief montagneux par exemple. le premier stade consiste à concevoir un algorithme utilisant en particulier des nombres aléatoires pour calculer la couleur de chaque point de l'image.

(voir panneau 7)

Ces images artificielles n'ont que l'apparence de la réalité, les méthodes qui les produisent n'ont rien à voir avec les processus naturels qui sont cause de la morphologie des montagnes ou des nuages... :

Alors, l'ordinateur : outil d'artistes ou outil de recherche ?

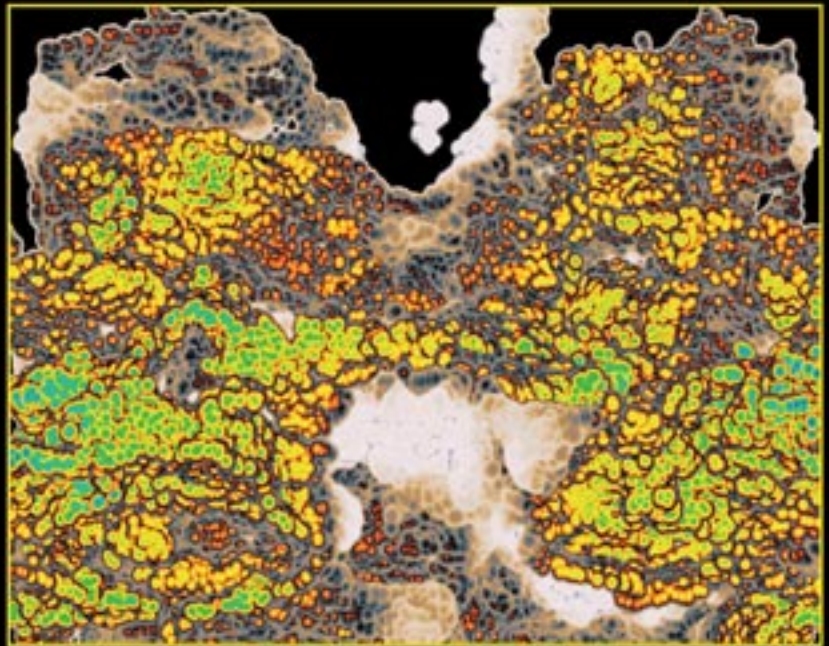
Mais, attention !

L'ordinateur a permis une approche expérimentale nouvelle : l'expérimentation virtuelle qui associe l'étude informatique du modèle mathématique d'un système associé à la mise en images interactives des résultats produits. Cette expérimentation virtuelle pour étudier la géométrie fractale pose des problèmes liés aux limites inhérentes de l'informatique.

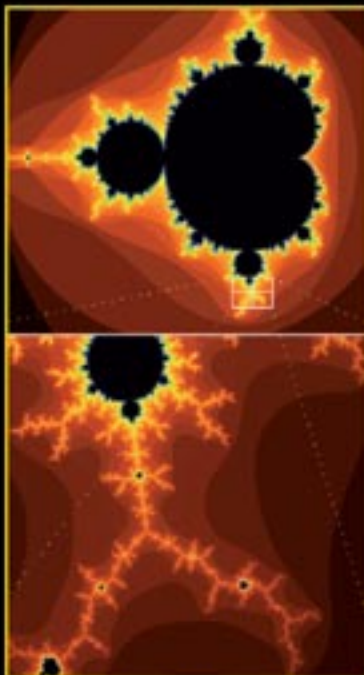
L'ordinateur de part sa structure même nous contraint à renoncer à la continuité. Les nombres réels essentiels aux Mathématiques et à la Physique, en particulier pour l'obtention d'équations différentielles via des passages à la limite, sont impossibles à représenter dans nos calculateurs, machines « discrètes » par définition. D'où des sources possibles d'erreurs à connaître et à maîtriser.

Fractales et Art

*En entrant dans l'ordinateur
des formules itératives
définissant des suites de points,
apparaissent des objets géométriques
d'une beauté surprenante.*



Structure fractale tridimensionnelle dans un hyper-tore J-F Colonna



Le long de la frontière de l'ensemble de Mandelbrot
J-F Colonna

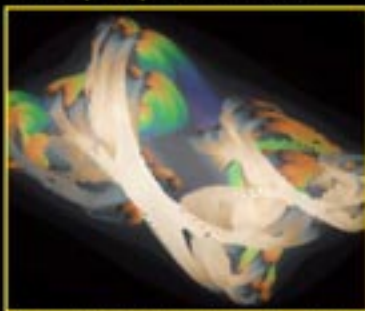
Véritable pont entre
l'Art et la Science,
la géométrie fractale produit
des formes nouvelles.



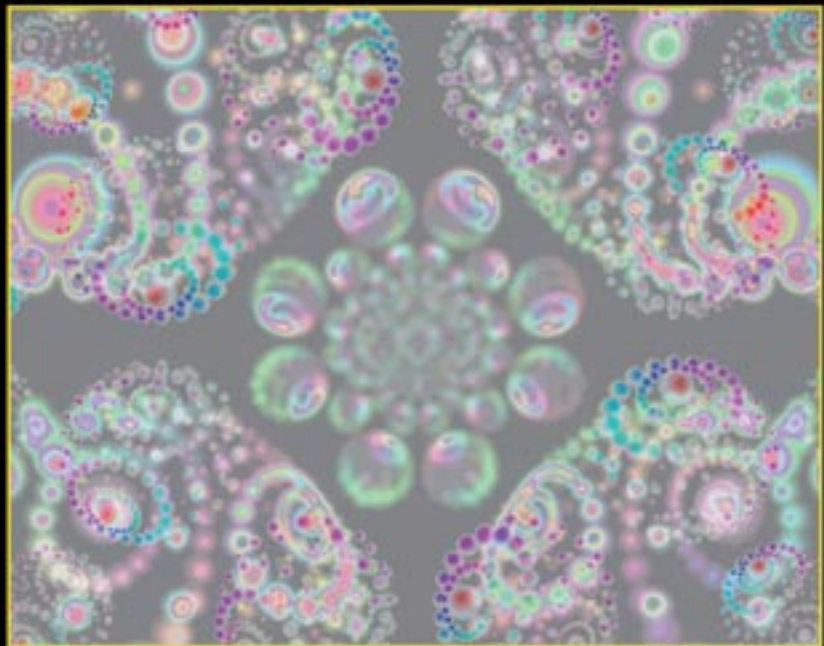
Les fractales, pinceau du mathématicien



Vue artistique de 128 ensembles de Julia dans le corps des quaternions J-F Colonna



Un ensemble de Julia dans le corps des quaternions J-F Colonna



Vue artistique de l'atome d'Hydrogene J-F Colonna



Monument Valley nuageuse J-F Colonna

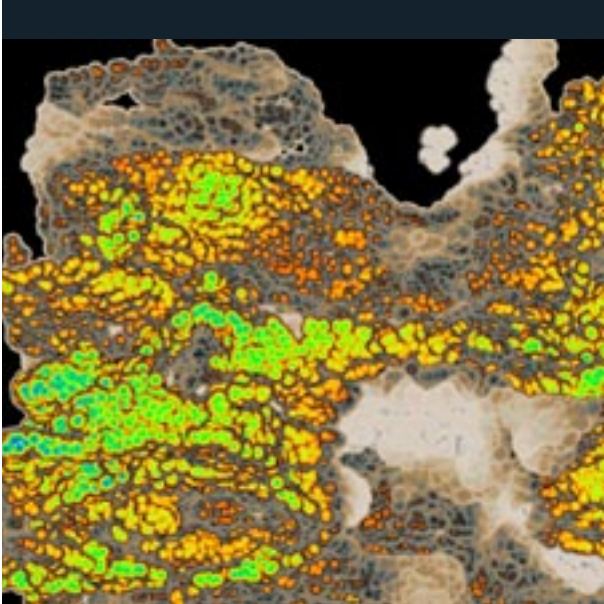
Faites entrer dans l'ordinateur des équations d'apparence anodine et vous verrez apparaître à l'écran faunes, flores réalistes, paysages de rêves ou univers mystérieux.



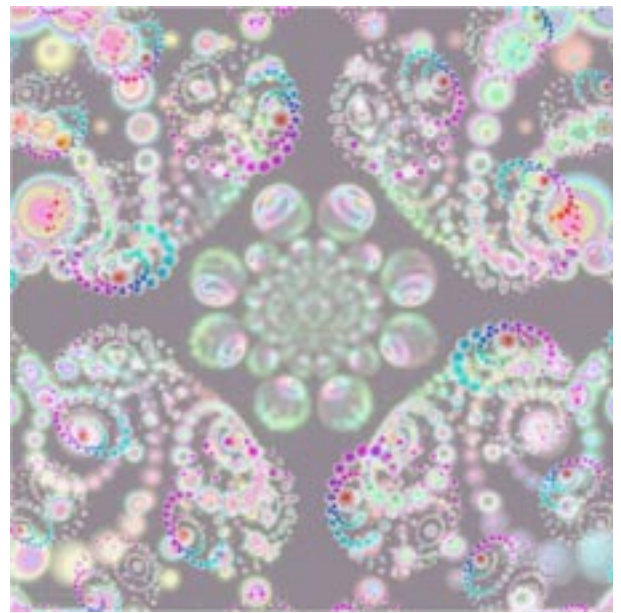
Au-delà de la porte J-F Colonna



Fractales et Art



Les fractales, pinceau du mathématicien



L'univers des fractales est connu pour l'extrême richesse des images que l'on y trouve.

Deux points de vue :

- A partir d'une forme compliquée peut-on trouver une formule simple qui permette de la recalculer ?

C'est le problème de la compression des images : au lieu de transmettre l'image, on cherche à transmettre la formule algébrique permettant d'obtenir l'image par itération. Le taux de compression sera d'autant plus grand que l'image à transmettre sera proche de celle d'un objet possédant une similitude interne.

- Inversement, on peut créer à partir d'une formule simple des formes compliquées et de fort belles images. Les ensembles de Mandelbrot et de Julia en sont de magnifiques exemples.

Fractales et Art

Définition de l'ensemble de Mandelbrot

On construit une suite de points dans le plan complexe, par itération :

On étudie en chaque point C du plan complexe, la convergence de la suite (Z_n) de points du plan complexe définie ainsi : $Z_0 = 0$ and $Z_{n+1} = Z_n^2 + C$

Tout point Z du plan complexe peut se représenter par ses coordonnées cartésiennes x et y et on a alors $Z = x + iy$

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + x_c \quad \text{et} \quad y_{n+1} = 2x_n y_n + y_c$$



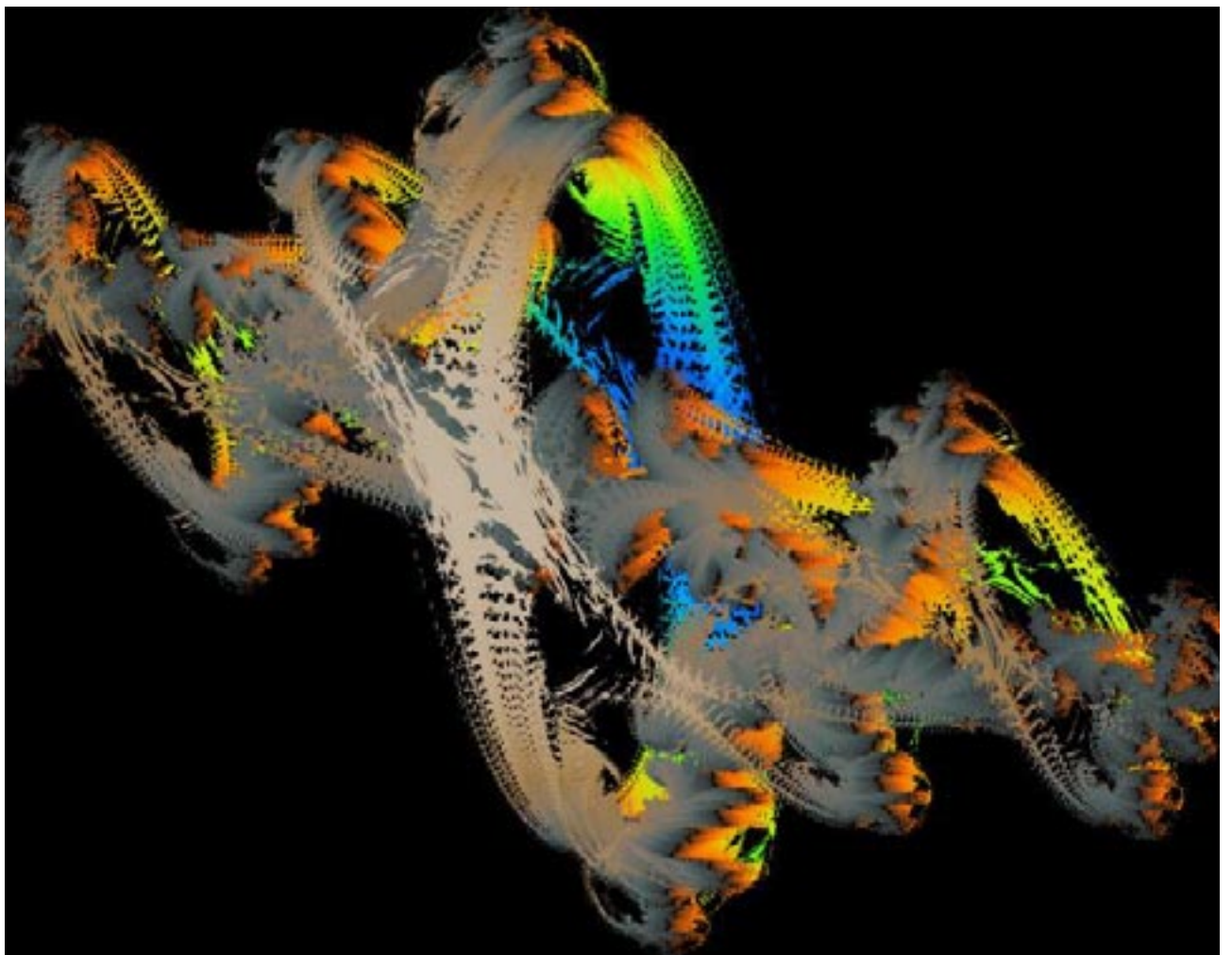
Fractales et Art

Définition des ensembles de Julia

On construit une suite de points dans le plan complexe, par itération :

On étudie en chaque point C du plan complexe, la convergence de la suite (Z_n) de points du plan complexe définie ainsi : $Z_0 = C$ and $Z_{n+1} = Z_n^2 + A$; avec A un point arbitraire.

Ainsi la géométrie fractale a produit des formes nouvelles dont le créateur reste le maître et l'initiateur. L'œuvre peut être vue non seulement dans son résultat mais aussi dans le programme qui lui a donné naissance ; elle devient une œuvre potentielle contenant en elle une infinité d'œuvres du même type.



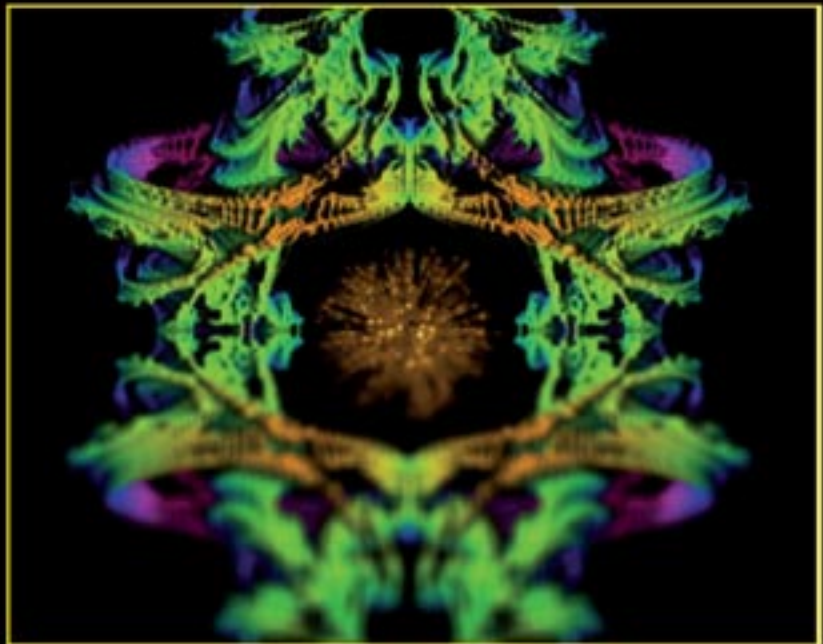
Et si l'univers était fractal ?

L'espace-temps est-il fractal ?

Les particules ont-elles une forme fractale ?

La répartition de la matière à grande échelle est-elle une distribution fractale ?

Notre univers ne serait-il qu'un parmi une infinité d'autres en perpétuelle création ?



La naissance de l'Univers J-F Colonna

Cette exposition a pu être réalisée grâce à Jean-François COLONNA, chercheur au Centre de Mathématiques Appliquées de l'Ecole Polytechnique.

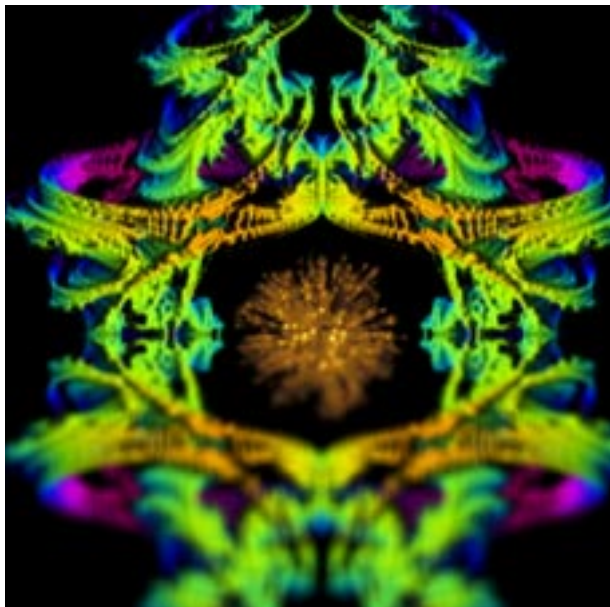
Texte Jean François COLONNA, Marie José PESTEL

création CLUM, avec le soutien de la Société Mathématique Appliquées et Industrielles.

*Pour paraphraser
Albert Einstein:*

*« Dieu fait-il
de la géométrie fractale ? »*





Et si l'univers était fractal ?

L'ensemble de Cantor est un ensemble de «points» que l'on obtient à partir d'un segment que l'on partage en trois parties égales et dont on ne retient que les deux segments extrêmes....

Pour cet ensemble, dont la dimension fractale est inférieure à 1, on parle de «poussières» car quantitativement les points de cet ensemble sont rares : si on prend un point au départ sur le segment origine on ne retrouvera presque jamais ce point dans l'ensemble obtenu après un grand nombre d'itérations.

Le mot " poussière " renvoie à la répartition de la matière dans l'univers. Cependant l'idée d'une distribution fractale des galaxies n'est qu'une hypothèse parmi d'autres. Les modèles que l'on peut construire sont liés à l'histoire des objets qui peuplent notre univers. Les données que nous possédons sont forcément très incomplètes.

Se poser la question de décrire l'Univers avec le langage mathématique nous conduit à nous interroger sur la nature même des Mathématiques et l'adéquation qui existe entre l'ordre qui règne dans l'univers (les symétries, les régularités, les invariants, les redondances, ...tout ne peut pas être chaos....) et l'existence de langages pour le décrire.

Heinrich Hertz, au siècle dernier évoquait déjà ces problèmes de relations entre mathématiques, sciences et univers :

« On ne peut échapper au sentiment que ces formules mathématiques ont une existence qui leur est propre, qu'elles sont plus savantes que ceux qui les ont découvertes, et que nous pouvons en extraire plus de science qu'il en a été mis à l'origine. »

Par exemple, ce n'est pas Einstein qui a inventé les trous noirs ou le Bing Bang et pourtant ils sont dans les équations de la Relativité Générale ainsi que bien d'autres choses.

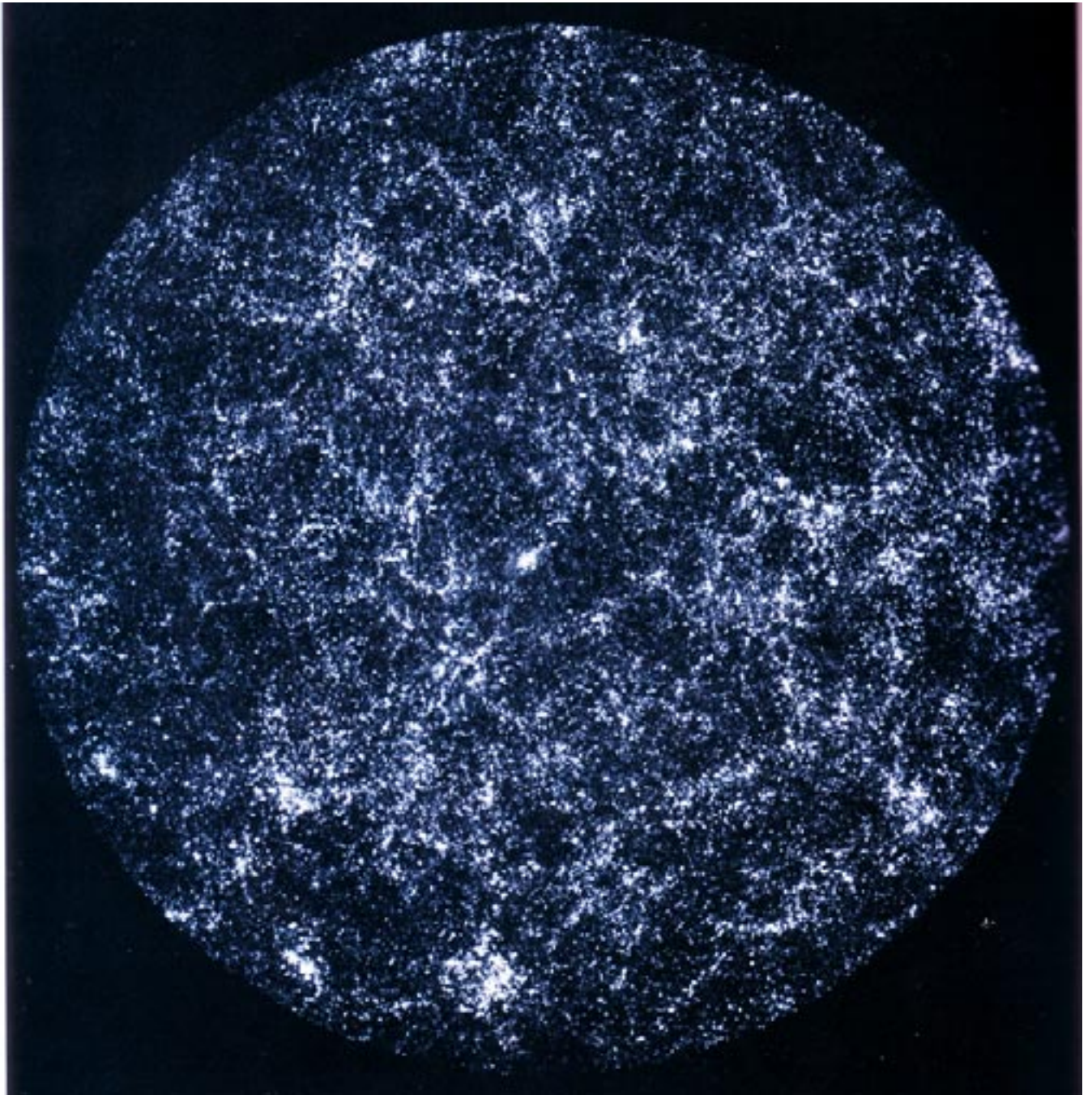


Photo de super amas de galaxies dans un cercle de diamètre angulaire de 100° centré sur le Pôle Nord de notre Galaxie. Cette photo suggère une distribution fractale des objets stellaires.

(photo de PJE Peebles)

Fractal : de fractus, brisé en latin.

Les définitions de Mandelbrot :

Fractal, adj. Sens intuitif. Se dit d'une figure géométrique ou d'un objet naturel qui combine les caractéristiques que voici. A) Ses parties ont la même forme ou structure que le tout, à ceci près qu'elles sont à une échelle différente et peuvent être légèrement déformées. B) Sa forme est soit extrêmement irrégulière soit extrêmement interrompue ou fragmentée et le reste, quelle que soit l'échelle d'examen. C) Il contient des " éléments distinctifs " dont les échelles sont très variées et couvrent une très large gamme.

Fractale, n.f. Configuration fractale. Ensemble ou objet fractal.

Ensemble fractal, n.m. Remplace le terme fractale lorsqu'il faut préciser qu'il s'agit d'ensemble mathématique.

Objet fractal, n.m. Remplace le terme fractale lorsqu'il faut préciser qu'il s'agit d'un objet naturel. Objet naturel qu'il est raisonnable et utile de remplacer mathématiquement par une fractale.

Modèle : Un modèle scientifique est une représentation simplifiée et formalisée de la réalité. Le modèle est constitué d'un ensemble d'équations qui retracent les " comportements " des objets scientifiques et les mécanismes de la nature. Par les possibilités qu'offre le traitement mathématique (déduction, comparaison, inférence, ...), les modèles constituent un outil indispensable pour prendre en compte les interdépendances complexes des systèmes naturels. Ils organisent de manière cohérente les données expérimentales et retracent sous une forme simplifiée le phénomène naturel. Par leur simplification et leur abstraction, ils sont en fait une simulation des phénomènes réels.

Un exemple simple : les lois expérimentales de Mariotte et Gay Lussac qui relient la pression d'un gaz à son volume ou à sa température absolue.

" Sans le renforcement des modèles, la pensée scientifique serait démunie de l'une de ses fonctions organisatrices, et il importe de remarquer qu'avec l'usage, elle fait plus que de coder l'expérience : elle la devance et l'articule "
Noël MOULOU *Encyclopaedia Universalis*

Mouvement brownien : Mouvement d'une petite particule observé pour la première fois en 1827 par le botaniste anglais Brown (1773-1858). Son interprétation physique et le contrôle expérimentale ont mis du temps. L'histoire du mouvement brownien est exemplaire de l'articulation entre l'empirique, l'expérimental et le théorique....

Paradigme : étymologiquement, en grec, c'est ce qui montre par une mise en parallèle (deigma : spécimen, exemples ; para ; à côté) Le paradigme donne à voir un exemple à la structure et aux propriétés facilement identifiables quelque chose qui n'est pas directement accessible . Le paradigme est, en ce sens, le prototype du modèle.

Randon : Élément aléatoire . Ce mot anglais qui veut dire donc aléatoire provient de l'ancien français randon qui signifiait " rapidité, impétuosité "

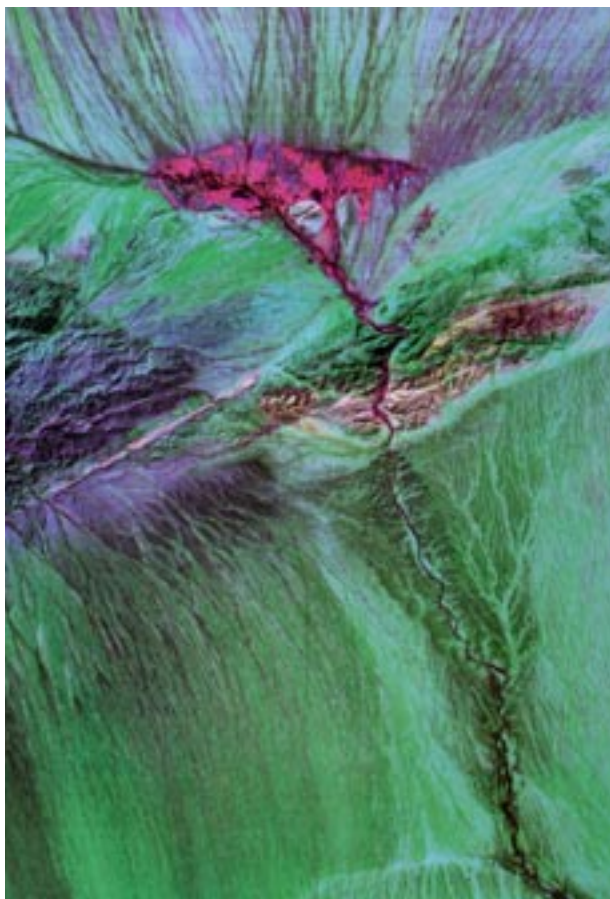
Randoniser : introduire un élément de hasard. Randoniser une liste d'objets c'est remplacer leur ordre d'origine par un ordre choisi au hasard.

Théorie : Vaste système explicatif qui synthétise un grand nombre de lois et donne une représentation unitaire de tout un secteur du réel.
Exemples : théorie newtonienne de l'attraction universelle ; théorie de la relativité ; théorie biologique de l'évolution ; théorie du big bang.....

Théorie mathématique : " Une fois obtenu, sous forme de lois naturelles, un lexique traduisant en symboles mathématiques les éléments observés, la théorie utilise exclusivement ce matériel symbolique. Elle trouve, dans les équations différentes des symboles identiques. Les mathématiques, par leur mécanisme propre, savent manipuler un ensemble d'équations par combinaison, généralisation, intégration et différentiation etc.... pour en tirer toutes conséquences. La théorie utilise toute la puissance des mathématiques pour chercher à coordonner et à hiérarchiser les équations dont elle dispose. " Jean Ullmo, La pensée scientifique



Vue de satellite d'une chaîne de montagne en Chine



Vue de satellite de la faille de l'Altyn Tagh dans le Tibet

BIBLIOGRAPHIE

Brochure IREM : Les Fractales Réflexions et travaux pour la classe

Université de Poitiers - Janvier 1996

Les Objets fractals

B. Mandelbrot Flammarion

Universalités et Fractales

Sapoval Flammarion

Les formes fractales -

Palais de la découverte

Les Fractales, Bibliothèque Tangente, HS n°418

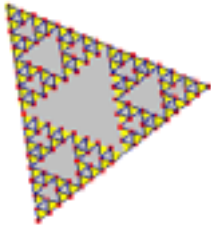
Conférence de Jean François Colonna

Colloque du 26-11-99 au Palais de la découverte : “*Evolutions et Révolutions des sciences et des techniques au XX^{ème} et XXI^{ème} siècle*”

site : www.lactamme.polytechnique.fr



Sol de la cathédrale d'Agnani, Italie, réalisé en 1104



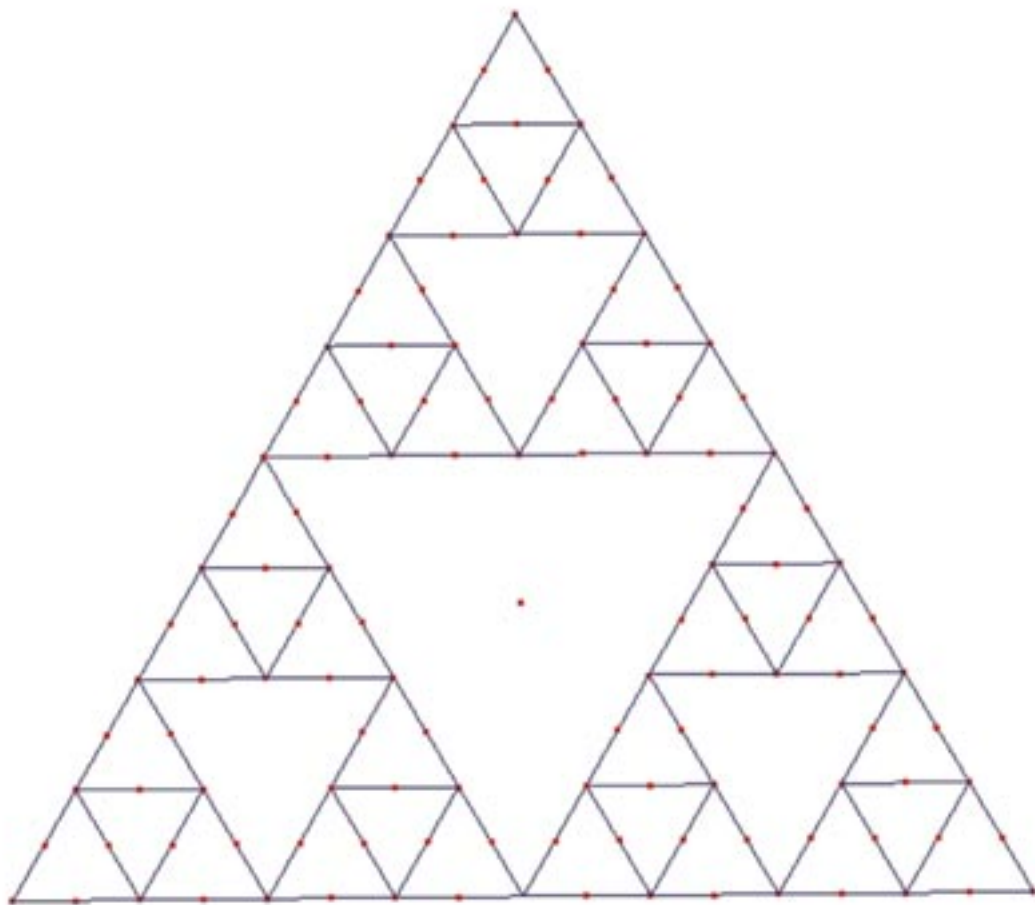
Activité 1

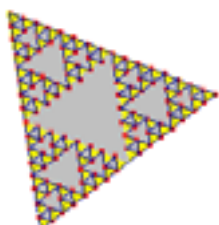
Dessinez votre tapis de Sierpinski

On découpe un triangle équilatéral en quatre triangles équilatéraux et on colorie le triangle central.

On recommence pour chaque triangle non coloré....

Coloriez et continuez.....





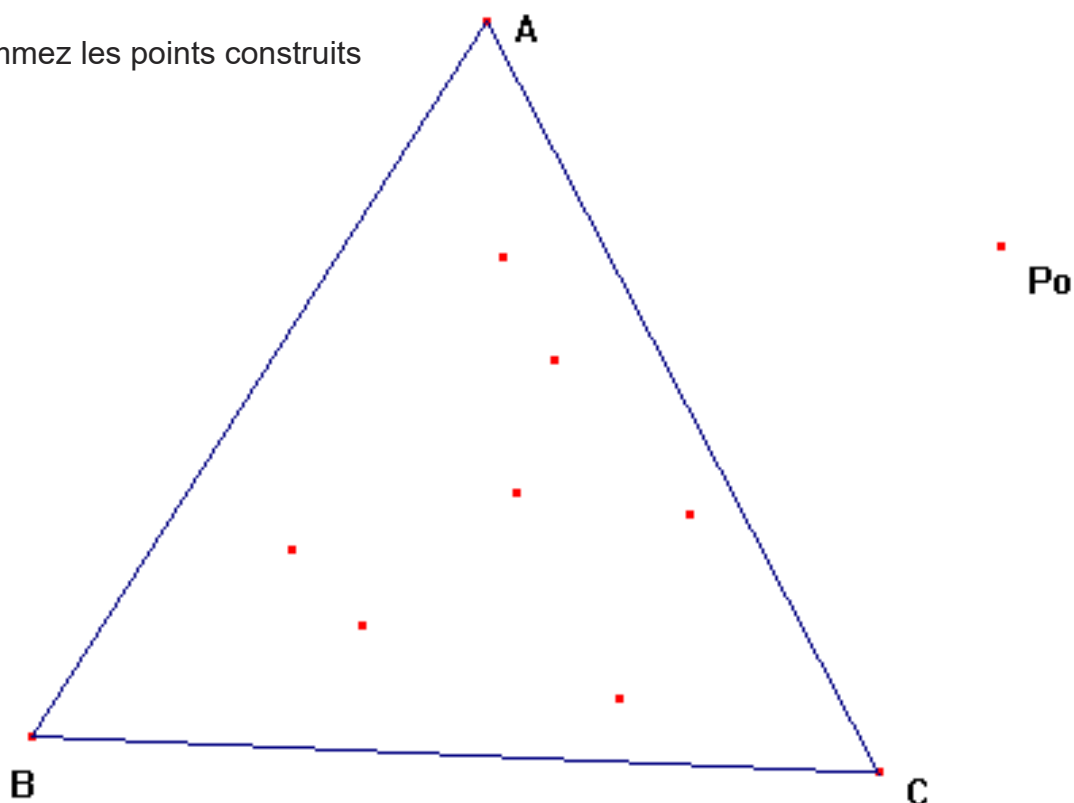
Activité 2

Le Jeu du hasard

Trois points A, B et C sont les sommets d'un triangle équilatéral

A partir d'un point P_0 on construit une suite de points P_n ainsi : P_n est le milieu de P_{n-1} et de l'un des trois points A, B ou C choisi au hasard

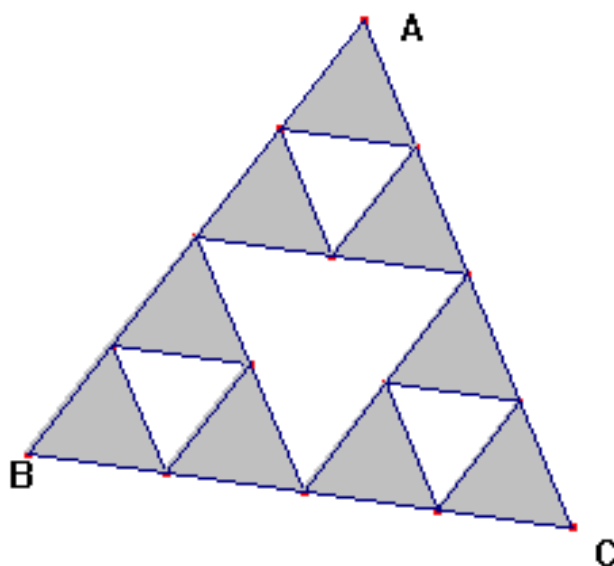
Nommez les points construits

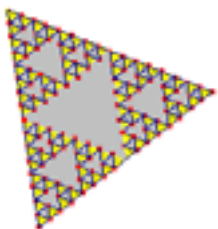


Quand on a construit un grand nombre de points on voit apparaître une disposition en tapis de Sierpinski

Comment l'expliquer ?

On peut montrer que dans chaque "triangle central", on trouve au plus un point.

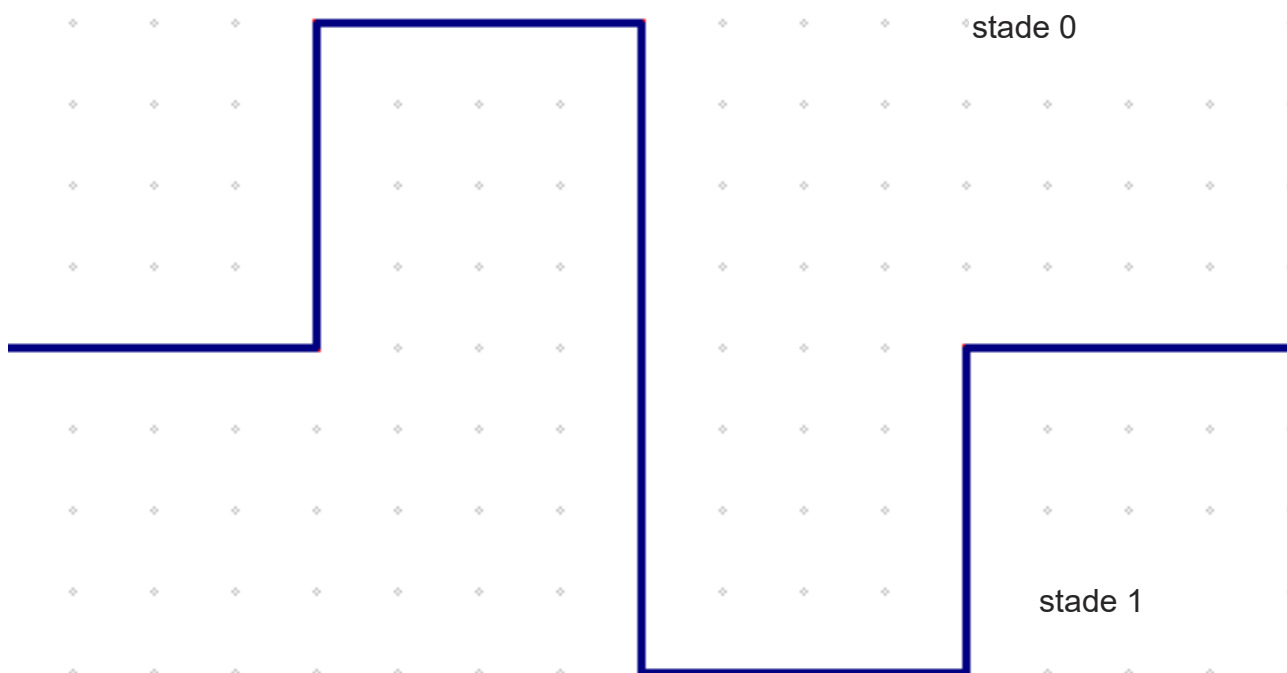




Activité 3

La courbe de Van Koch quadratique

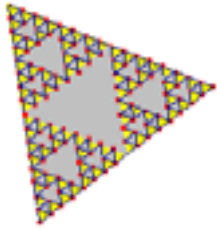
On peut passer du stade 0 au stade 1 par pliage



Dessinez le stade 2 ou construisez le sur une planche cloutée avec des brins de laine ou sur la page "cloutée"



En supposant que la longueur initiale soit de 1 dm au bout de combien de stades dépassera-t-on 1km ?



Activité 4

Construisez votre " dragon " par pliage

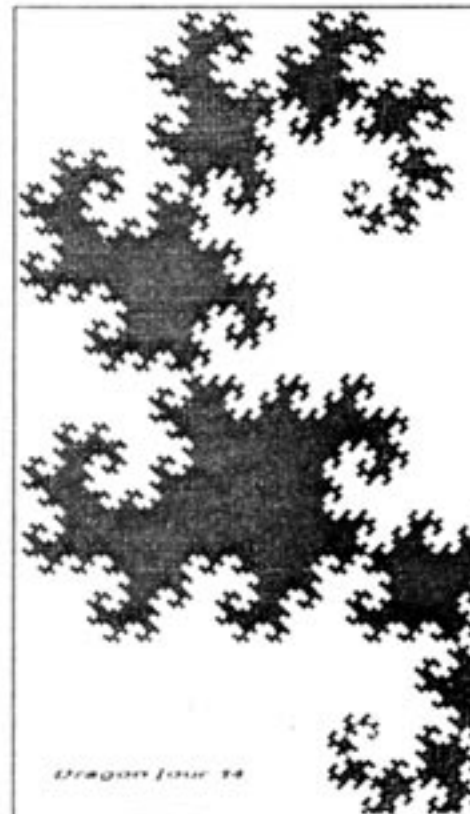
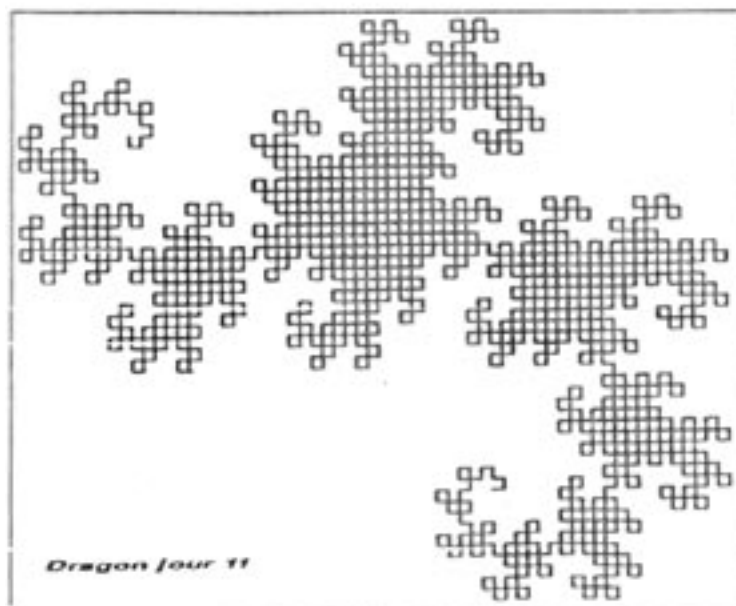
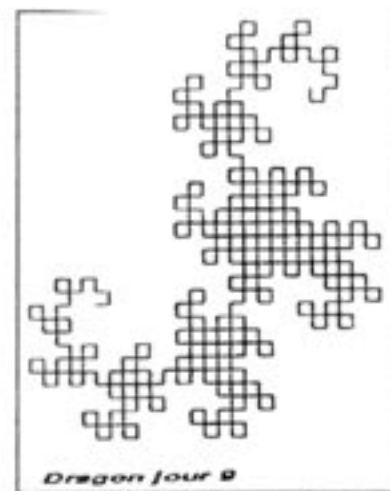
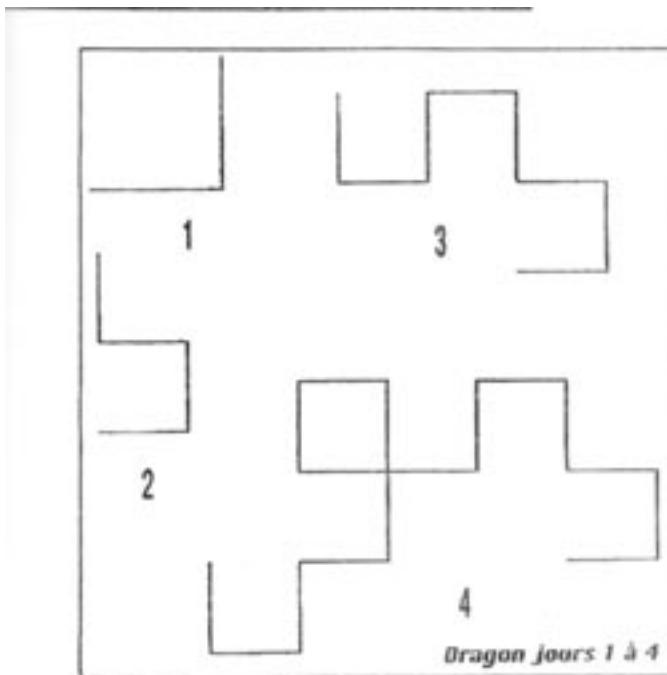
En 1960, le physicien John Heighway inventa une courbe couvrant une surface en pliant et repliant une longue bande de papier.

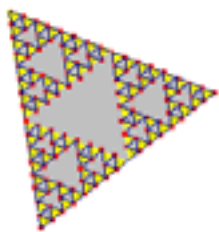
Prendre une longue bande de papier : le dragon le jour 0

La plier en deux, en plaçant le pli à droite, puis la déplier à angle droit : le dragon le jour 1

Replier comme précédemment, plier à nouveau en deux de la même manière, déplier pour former le dragon du jour 2

Recommencez pour dessiner le dragon du jour 5.





Activité 4

Construisez votre " dragon " par pliage

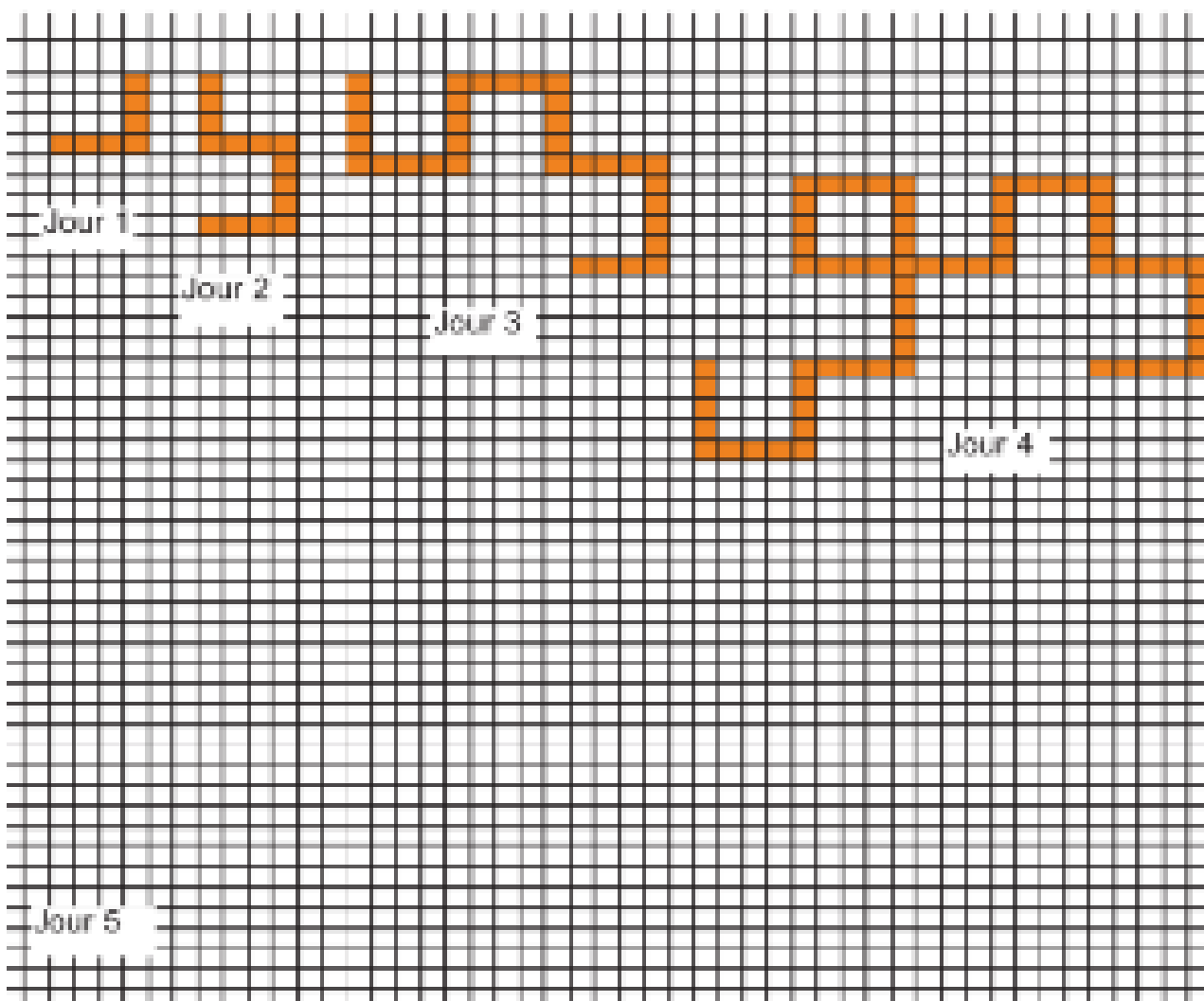
En 1960, le physicien John Heighway inventa une courbe couvrant une surface en pliant et repliant une longue bande de papier.

Prendre une longue bande de papier : le dragon le jour 0

La plier en deux, en plaçant le pli à droite, puis la déplier à angle droit : le dragon le jour 1

Replier comme précédemment, plier à nouveau en deux de la même manière, déplier pour former le dragon du jour 2

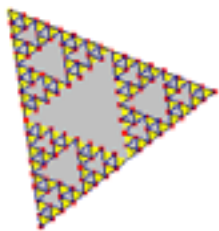
Recommencez pour dessiner le dragon du jour 5.





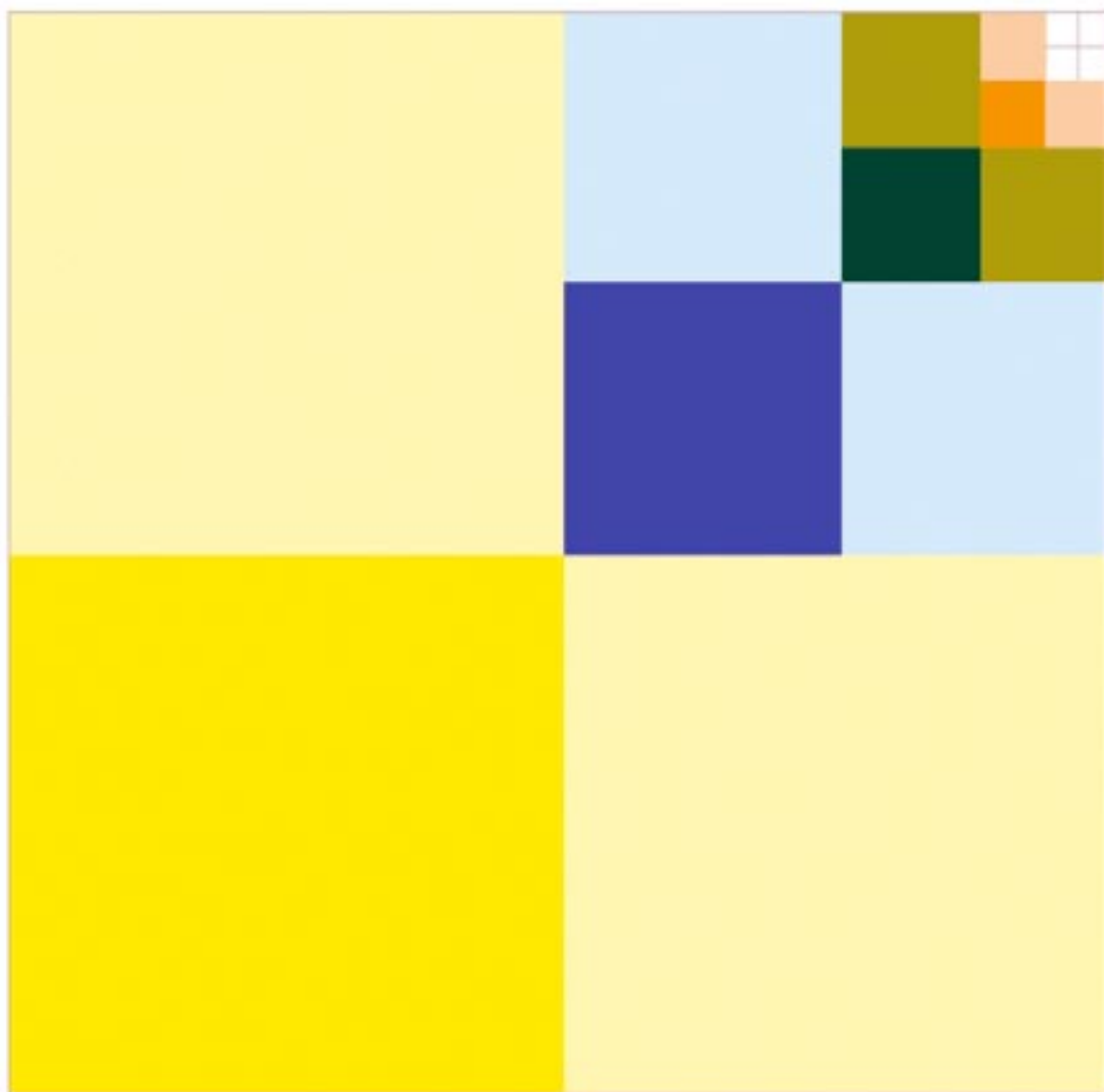
Coloriez les cases des nombres impairs et observez.....

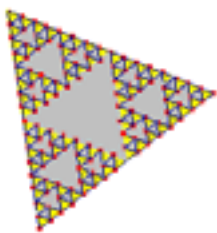
[illegible]



Activité 6

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots = ?$$





Activité 7

Jouons avec des allumettes

Avec 3 allumettes, on peut former un triangle équilatéral.

Avec 9 allumettes, faire le maximum de triangles équilatéraux.
Combien en trouvez - vous ?

Avec 18 allumettes, faire le maximum de triangles équilatéraux.
Combien en trouvez - vous ?

Avec 27 allumettes, on peut former un tapis de Sierpinski.
On y comptetriangles équilatéraux
Peut-on faire mieux ?

