2000 ans d'énigmes et de jeux mathématiques

Livret pédagogique
édité par
le Comité International des Jeux Mathématiques

Enigmes et Jeux avec Archimède

Le STOMACHION,
ou loculus d'Archimède
est un puzzle carré
découpé en 14 pièces.

L' aire de chaque pièce est un multiple de l'aire de la plus petite des pièces. Avec ses 536 solutions, il semble que ce puzzle ait été un prétexte au dénombrement et qu'il constitue le premier traité de combinatoire.

Le Stomachion

La mort d'Archimède - Mosaïque - Städtishe Galerie du Liebieghaus de Frankfort

*De l'histoire antique à nos jours
les hommes se sont affrontés armes à la main,
mais, heureusement pour l'honneur de l'esprit humain,
ils ont aussi cherché à se mesurer
par énigmes et défis mathématiques interposés.*

Les boeufs du soleil

Un problème difficile proposé par Archimède à Eratosthène

«Le dieu Soleil possède un troupeau de taureaux et de vaches, dont une partie est blanche, une partie noire, une partie tachetée, et la quatrième brune. Parmi les taureaux, le nombre de ceux qui sont blancs dépasse le nombre des bruns de la moitié plus un tiers du nombre des taureaux noirs. Le nombre des taureaux noirs dépasse le nombre des taureaux bruns d'un quart plus un cinquième du nombre des taureaux tachetés. Enfin le nombre des taureaux tachetés dépasse celui des bruns d'un sixième plus un septième du nombre des taureaux blancs. Parmi les vaches, le nombre des blanches est égal au tiers augmenté du quart du nombre total des bovins noirs, le nombre des vaches noires, au quart augmenté du cinquième du nombre total des bovins tachetés, le nombre des vaches tachetées, au cinquième augmenté du sixième du nombre total des bovins bruns. Enfin le nombre des vaches brunes est égal à un sixième plus un septième du nombre total des bovins blancs.

Quelle est la composition du troupeau ?»

«Quand tu auras trouvé, ami, et embrassé dans ton esprit la solution de toutes ces questions, en indiquant toutes les mesures de ces multitudes, rentre chez toi, te glorifiant de ta victoire, et sache qu'on te juge arrivé à la perfection dans cette science.»

Archimède

Les mathématiciens d'Alexandrie ne purent résoudre le problème des bœufs du Soleil car sa résolution conduit à un système de sept équations à huit inconnues.

2000 ans d'énigmes et de jeux mathématiques

1

Le stomachion d'Archimède ou Loculus (petite boîte)

Historique :

Le **Stomachion** est un livre consacré à l'étude d'un puzzle géométrique. On n'en connaît que des fragments, mais la connaissance de ce livre, longtemps considéré comme un oeuvre mineure, progresse aujourd'hui encore, grâce au déchiffrage du palimpseste d'Archimède. Ce traité pourrait être considéré comme le premier traité de mathématique combinatoire.

Pendant des siècles, on n'a connu de cette oeuvre, attribuée à Archimède, que les citations qu'en font les auteurs romains Marius Victorinus, Atilius Fortunatianus et Ausonius (4^{e} siècle de notre ère).

Ce n'est qu'à la fin du 19^{e} siècle qu'on découvrit des fragments du texte d'Archimède.
Le premier fragment fut découvert dans un texte arabe par l'orientaliste H. Suter, qui en publia une traduction allemande en 1899.

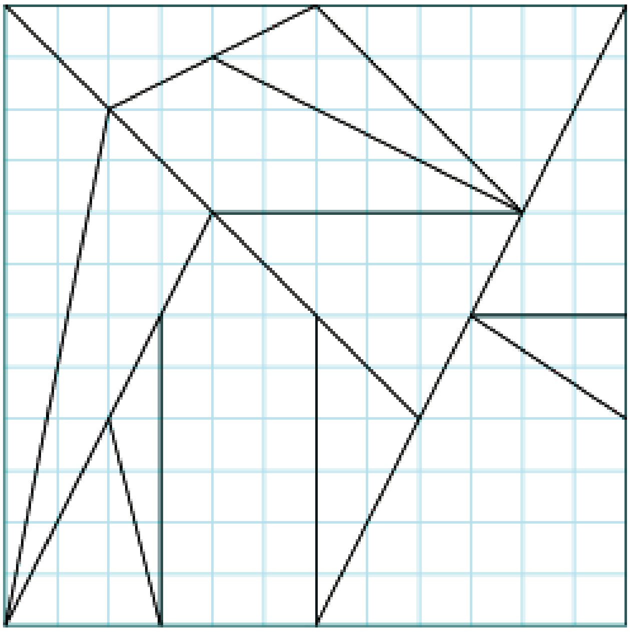
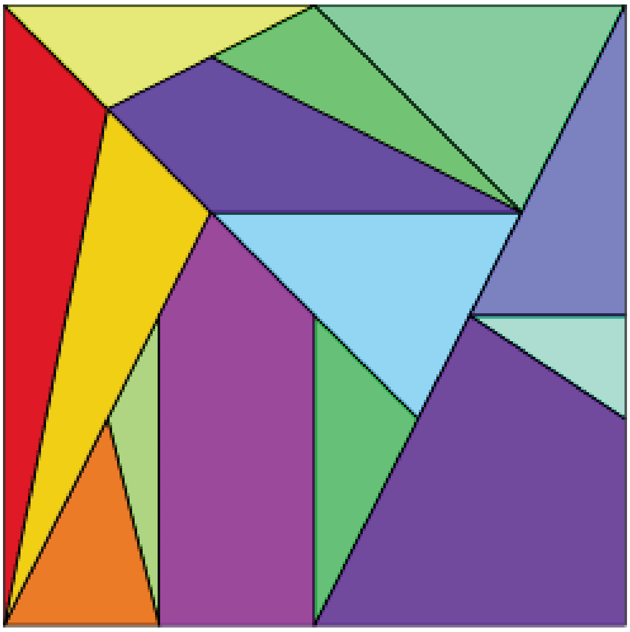
En 2003, un spécialiste américain des puzzles, Bill Cutler, trouva toutes les solutions de l 'assemblage des pièces du puzzle d'Archimède en carré, à l'aide d'un programme informatique. Les solutions sont au nombre de 536, sans compter les rotations et les symétries.

La construction du Stomachion :

Le stomachion a été dessiné sur un quadrillage de 12 sur 12.

Les aires des quatorze pièces du puzzle, exprimées en quarante-huitièmes de l'aire du grand carré donnent :

- 2 pièces de 1/48
- 4 pièces de 2/48
- 1 pièce de 3/48
- 5 pièces de 4/48
- 1 pièce de 7/48
- 1 pièce de 8/48.

Remarque : 1/48 = 3/144

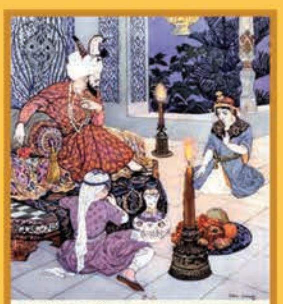
Activités proposées :

Sur le quadrillage proposé, retrouver les aires des 14 pièces découpées
puis celle du carré final.

Avec Pythagore, calculer les longueurs des côtés et observer des positions interdites pour certaines pièces dans le puzzle final.

Avec des lignes trigonométriques et la calculatrice, évaluer des angles….

Enigmes et jeux dans le monde arabe



Les trois septièmes du cœur pour son regard,

Un septième est offert pour le rose de (ses) deux joues,

Un septième et la moitié d'un septième
et le quart pour le refus d'un désir inassouvi,

Un septième et un sixième d'un quart sont la
part de seins bien arrondis qui se sont refusés
au péché de mon étreinte et qui m'ont repoussé.

Le reste, qui est cinq parts, est pour
des paroles d'elle qui étancheraient ma soif
si elles étaient entendues

Car me voilà, entre ses mains, une proie de
l'amour et de la jeunesse, le cœur tout entier
largement ouvert.

Ibn al-Bannâ, 1256 - 1321
Mathématicien de Marrakech auteur du traité
Le soulèvement du voile sur les formes des opérations du calcul.

D'autres problèmes récréatifs sont surtout l'occasion de construire et de résoudre des systèmes d'équations dont le nombre des solutions varie de 1 à 2676.

En voici un exemple :

4 personnes vont au marché pour acheter une bête de somme.

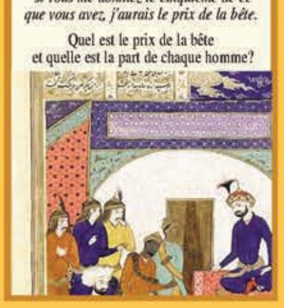
Le premier dit aux trois autres :
si vous me donniez la moitié de ce que vous avez, j'aurais le prix de la bête.

Le second dit aux autres :
si vous me donniez le tiers de ce que vous avez, j'aurais le prix de la bête.

Le troisième dit aux trois autres :
si vous me donniez le quart de ce que vous avez, j'aurais le prix de la bête.

Le quatrième dit aux autres :
si vous me donniez le cinquième de ce que vous avez, j'aurais le prix de la bête.

Quel est le prix de la bête
et quelle est la part de chaque homme?



Affiche de l'exposition *l'âge d'or des sciences arabes*

Poèmes, énigmes et défis mathématiques font partie de la tradition arabe médiévale. Prétextes pour mieux maîtriser concepts et méthodes, ils contribuent brillamment à la circulation des idées dans le monde musulman à travers les âges et les cultures.

Dans le livre sur
Ce qui est nécessaire à l'artisan en constructions géométriques,
Abou l-Wafa, grand scientifique du Xᵉ siècle, écrit :
J'étais présent à une réunion où se trouvèrent une quantité de praticiens et de géomètres auxquels on demanda de quelle manière ils feraient un seul carré de trois carrés égaux...
Refusant une construction proposée par les géomètres, basée sur le calcul du côté du carré cherché, Abou l-Wafa préfère une construction imaginée par les artisans, utilisant des propriétés géométriques.

Trois petits carrés pour en faire un grand...

Les Arabes et les mathématiques

Historique :

Bagdad (capitale de l'actuel Iraq) est, dès le règne du calife Al Mansour, à la seconde moitié du 8^{e} siècle, le fief de la connaissance. De nombreuses écoles et bibliothèques y sont créées. En 832, le calife Al Mamoun y fonde la maison de la Sagesse (Baït al Hikma). Les textes scientifiques (astronomie, mathématique, médecine) récoltés au cours des conquêtes sont traduits et étudiés (en particulier, arithmétique et géométrie grecque, algèbre indienne). Dès lors et jusqu'au 15^{e} siècle, aube de la Renaissance occidentale, malgré les huit croisades de 1096 à 1270, l'influence arabe s'étend dans le monde méditérranéen.
Utilisant avec brio l'héritage géométrique grec, les mathématiciens arabes sont particulièrement novateurs en algèbre et en trigonométrie avec le développement de l'astronomie. Leur contribution implicite dans le renouveau des mathématiques en Europe est ainsi capitale.

Abu Kamil, égyptien, vers 850-930
Cet algébriste égyptien succède en quelque sorte, dans la renommée (il fut surnommé le calculateur égyptien), à Al Khwarizmi et propose, dans son «*Algèbre*», livre de la transposition (al jabr) et de la réduction (al muqâbalah), 69 problèmes des premier et second degré où il manipule brillament les radicaux (racines carrées) dont la découverte remonte aux Pythagoriciens.

Omar Khayyam, perse, 1050-1123
Omar al-Khayyam (parfois écrit al-Hayyam), célèbre philosophe, poète, astronome, disciple d'Avicenne est connu dans le monde mathématique pour ses commentaires des *Éléments* d'Euclide (en particulier, théorie des proportions et discussion du 5^{e} postulat proche de celle de Saccheri) et sa classification des différents types d'équations algébriques des second et troisième degrés où il fait usage de radicaux.
Son œuvre complète les travaux de **Al-Khwarizmi** et apporte des résolutions (partielles) de type géométrique (intersections de coniques) à l'équation du 3^{e} degré de la forme $x^3 + ax = b$.

Sans oublier le grand philosophe **Ibn Abdallah ibn Sina,** dit **Avicenne**.

Les chiffres de notre système décimal (0 à 9) dits « arabes » ne furent introduits en Europe que vers l'an 1000. En fait, ils proviennent de l'Inde après maintes transformations dans leur graphisme et furent transmis par les Arabes au monde occidental, entre autres, par Gerbert d'Aurillac, le Pape de l'an 1000.

« *La déclaration d'amour* » ou comment se partage mon cœur ...

Les trois septièmes du coeur pour son regard,

Un septième est offert pour le rose de
(ses) deux joues,

Un septième et la moitié d'un septième
et le quart pour le refus d'un désir inassouvi,

Un septième et un sixième d'un quart sont la part de seins bien arrondis qui se sont refusés au
péché de mon étreinte
et qui m'ont repoussé.

Le reste, qui est cinq parts, est pour
des paroles d'elle qui étancheraient ma soif
si elles étaient entendues

Car me voilà, entre ses mains, une proie de
l'amour et de la jeunesse, le coeur tout entier
largement ouvert.

Ibn al-Bannâ, 1256 - 1321
Mathématicien de Marrakech auteur du traité
Le soulèvement du voile sur les formes des opérations du calcul.

Solution :

Si on note X le partage de mon coeur tout entier, et en interprétant le texte
(les un septième que nous avons écrits en rouge sont sans doute implicites)
on peut écrire :

$$[\ 3/7 + 1/7 + 1/7 + 1/2\ (1/7) + 1/4\ (1/7) + 1/7 + 1/6\ (1/4(1/7))] + 5 / X = 1.$$

Mon coeur se partage en 168^{e}

Des textes et ...leurs solutions :

“La bête de somme”

4 personnes vont au marché pour acheter une bête de somme.

Le premier dit aux trois autres :
si vous me donniez la moitié de ce que vous avez, j'aurais le prix de la bête.

Le second dit aux autres :
si vous me donniez le tiers de ce que vous avez, j'aurais le prix de la bête.

Le troisième dit aux trois autres :
si vous me donniez le quart de ce que vous avez, j'aurais le prix de la bête.

Le quatrième dit aux autres :
si vous me donniez le cinquième de ce que vous avez, j'aurais le prix de la bête.

Quel est le prix de la bête
et quelle est la part de chaque homme?

Solution

Soit x l'argent du premier homme,
y celui du second,
z celui du troisième et
t celui du quatrième.

On a : $x+1/2(y+z+t) = y+1/3(x+z+t) = z+1/4(x+y+t) = t+1/5(x+y+z)$

D'où après calcul, $y = (2+1/5)+3/5t$; $z = (2+3/5)x+4/5t$; $t = 28x$.

En fait, une infinité de réponses à ce problème.
Si, par exemple, $x = 1$, on a $y = 19$; $t = 28$; $z = 25$ et
le prix de la bête est de $1 + 1/2\ (19+25+28) = 37$.

Mais si on fixe $x = 2$, la part de chacun est doublé et le prix de la bête aussi ...

Un problème de volatiles
(dont on retrouve plusieurs versions chez Alcuin d'York et dans le *Liber Abaci* de Fibonacci)

Un homme va au marché avec 25 dirhams en poche et il achète 25 volatiles :
des oies à 5 dirhams l'unité,
des poulets à 4 dirhams l'unité et
des étourneaux à un dirham la dizaine.
Combien a-t-il acheté de volatiles de chaque espèce ?

Solution :

Soit x le nombre d'oies, y le nombre de poulets , alors 25 - x - y est le nombre d'étourneaux
Les 25 dirhams se répartissent ainsi : 5x pour les oies, 4y pour les poulets et 1/10(25-x-y) pour les étourneaux .

D'où : $25 = 5x+4y+(2+1/2) -x/10 - y/10$

Soit $22+1/2 = 4x+9/10x+3y+9/10y$ et donc $225 = 49x + 39y$

Il faut résoudre cette équation en nombres entiers seulement.

On trouve : 3 oies, 2 poulets et 20 étourneaux …

Problème de poids :

Déterminer le nombre et le type de poids à l'aide des quels on peut peser
des quantités allant de une unité jusqu'à la somme de ces poids.

Solution :

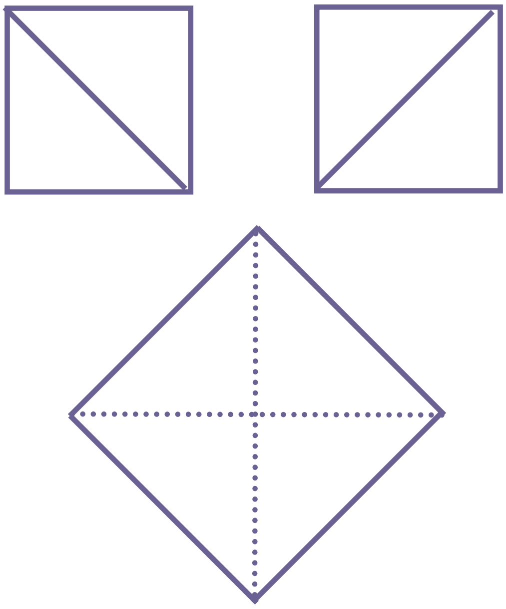
Les poids peuvent être de la forme : $1, 3, 3^2, \ldots, 3^n$. On peut alors peser toutes
les quantités entre 1 et $1+3+3^2+\ldots+3^n$.

Exemple : Avec des poids de 1, 3, 9 et 27 on peut peser toutes les quantités
entre 1 et 40.

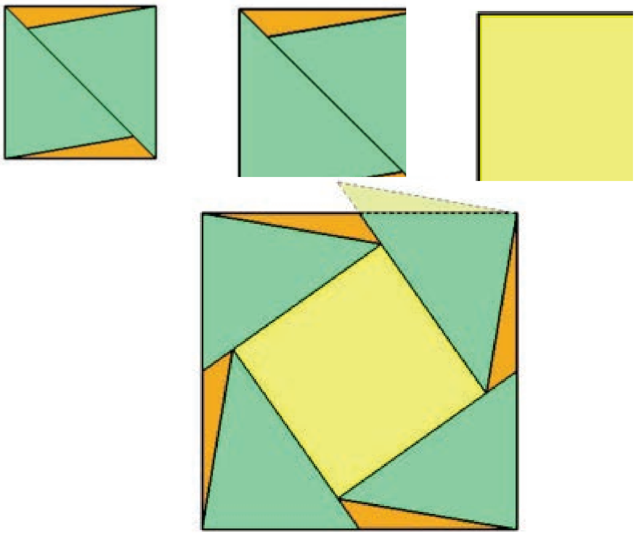
Mais les poids peuvent être aussi : $1, 2,\ldots, 2^n$
ou si l'on compte en base 10 : $1, 10,\ldots, 10^n$

Découpage du carré, voici quelques idées

Deux carrés pour un

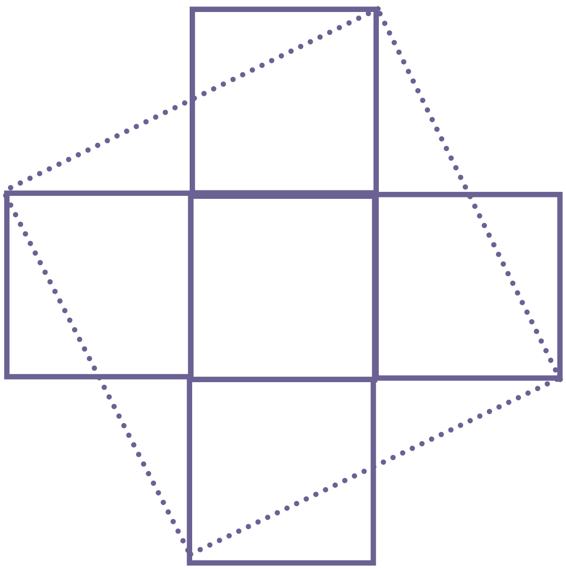


Trois carrés pour un

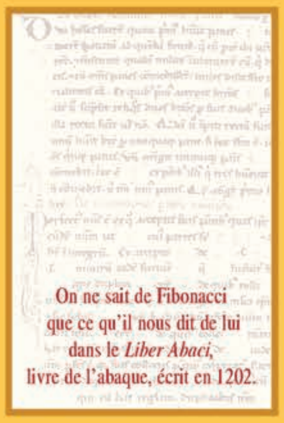


Quatre carrés pour un : c’est trop facile !

Et enfin, cinq carrés pour un



Enigmes et Jeux avec Fibonacci



On ne sait de Fibonacci que ce qu'il nous dit de lui dans le *Liber Abaci*, livre de l'abaque, écrit en 1202.

Quot paria cunuculorum in uno anno ex uno pario germinentur ?

«Quelqu'un plaça un couple de lapins dans un lieu clos de murs de tous côtés pour savoir combien de bêtes seraient engendrées par ce couple en une seule année. La nature de ces animaux veut qu'un couple engendre un autre couple chaque mois. Les petits sont, à leur tour, capables de se reproduire le second mois qui suit leur naissance.»

Combien de couples de lapins sont engendrés, en une année, par un seul couple ?

Fibonacci, un voyageur de commerce mathématicien

« O Léonard de Pise, tu fus un grand scientifique, toi qui a éclairé l'Italie sur les pratiques d'arithmétique. »

Antonio de Mazzinghi (XIVe siècle)

De duobus hominibus habentibus panes

Un jour, deux hommes avaient l'un trois pains et l'autre deux. Ils allèrent se promener auprès d'une source. Lorsqu'ils furent arrivés en ce lieu, ils s'assirent pour manger. Un soldat passa. Ils l'invitèrent. Il prit place à côté d'eux et il mangea avec eux, chaque convive ayant part égale. Lorsque tous les pains furent mangés, le soldat partit en leur laissant cinq pièces pour prix de son repas. De cet argent, le premier prit 3 pièces, comme il avait apporté trois pains ; l'autre, de son côté, prit les 2 pièces qui restaient pour prix de ses deux pains.

On demande si le partage a été bien fait.

Du roi qui voulait planter des arbres ou la règle des 5

Un roi envoya 30 hommes dans son verger. S'ils plantent 1000 arbres en 9 jours, en combien de jours 36 hommes planteront 4400 arbres ?

De la citerne pourvue en son fond de quatre bondes

Soit une citerne qui a quatre bondes.
Par la première d'entre elles, elle se vide en un jour;
par la seconde, en deux jours;
par la troisième en trois jours;
par la quatrième, en quatre jours.

On cherche à savoir en combien d'heures elle se videra, si les quatre bondes sont simultanément ouvertes.

Fibonacci : Un grand mathématicien dont on connaît très peu de chose !

Historique :

Il est né autour de 1170 à Pise
Il devait avoir 12 ans quand il part avec son père, commerçant à Bougie (Algérie) et reçoit une première initiation aux mathématiques.
Ses voyages le conduisent à travers le bassin méditerranéen (Syrie, Sicile, Egypte, Grèce, Provence) et l'amène à approfondir ses connaissances.
De retour à Pise, il est reçu à la cour de Frédéric II, grand ami des sciences.
Il décède à Pise, vers 1250.

Le problème des lapins :

« Quelqu'un plaça un couple de lapins dans un lieu clos de murs de tous côtés pour savoir combien de bêtes seraient engendrées par ce couple en une seule année. La nature de ces animaux veut qu'un couple engendre un autre couple chaque mois. Les petits sont, à leur tour, capables de se reproduire le second mois qui suit leur naissance. »

Solution :

Au début 1 couple de lapins ….
Le premier mois , aucune naissance donc toujours 1 couple de lapins dans l'enclos
Le 2ème mois, **1** naissance d'un couple de lapins, donc 2 couples de lapins dans l'enclos
Le 3ème mois, **1** naissance d'un couple de lapins, donc 3 couples de lapins dans l'enclos
Le 4ème mois, **2** naissances de couples de lapins, donc 5 couples de lapins dans l'enclos
Le 5ème mois, **3** naissances de couples de lapins, donc 8 couples de lapins dans l'enclos
Le 6ème mois, **5** naissances de couples de lapins, donc 13 couples de lapins dans l'enclos
Le 7ème mois, **8** naissances de couples de lapins, donc 21 couples de lapins dans l'enclos
Le 8ème mois, **13** naissances de couples de lapins, donc 34 couples de lapins dans l'enclos
Le 9ème mois, 2**1** naissances de couples de lapins, donc 55 couples de lapins dans l'enclos
Le 10ème mois, **34** naissances de couples de lapins, donc 89 couples de lapins dans l'enclos
Le 11ème mois, **55** naissances de couples de lapins, donc 144 couples de lapins dans l'enclos
Le 12ème mois, **89** naissances de couples de lapins, donc **233** couples de lapins dans l'enclos

La suite qui apparait en comptant les naissances des couples de lapins tous les mois a été appelée, par E. Lucas, «*suite de Fibonacci*» . Le rapport de deux termes consécutifs tend vers le nombre d'or. Essayer de calculer 34/21, 55/34, 89/55, 144/ 89, 233/144, ...

On peut calculer le $n^{ème}$ terme $F(n)$ de la suite de Fibonacci ainsi : $F_n = \dfrac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$
où φ désigne le nombre d'or.

Exercices proposés :

Des hommes et trois pains :

Un jour, deux hommes avaient l'un trois pains et l'autre deux. Ils allèrent se promener auprès d'une source. Lorsqu'ils furent arrivés en ce lieu, ils s'assirent pour manger. Un soldat passa. Ils l'invitèrent. Il prit place à côté d'eux et il mangea avec eux, chaque convive ayant part égale. Lorsque tous les pains furent mangés, le soldat partit en leur laissant cinq pièces pour prix de son repas. De cet argent, le premier prit 3 pièces, comme il avait apporté trois pains ; l'autre, de son côté, prit les 2 pièces qui restaient pour prix de ses deux pains. On demande si le partage a été bien fait.

Solution :

Chaque homme a pris 5/3 de pain.
A a mangé 1+ 2/3 de son pain et a donné le reste au soldat
qui a mangé 3 - 5/3 = 4/3 du pain de A.
B a mangé (1+ 2/3) de son pain et en a laissé le tiers (1/3) au soldat.
A a donc donné 4 fois plus de pain au soldat que B.
A doit récupérer 4 pièces et B n'en prendre qu'une.

Du roi qui voulait planter des arbres :

Un roi envoya 30 hommes dans son verger. S'ils plantent 1000 arbres en 9 jours, en combien de jours 36 hommes planteront 4400 arbres ?

Solution :
Nous vous proposons deux solutions ..
Une solution purement arithmétique :
Pour planter 1000 arbres, il faut 30 hommes en 9 jours, alors 1 seul homme met 30 x 9 = 270 jours pour planter les 1000 arbres.
Toujours tout seul, un homme met 270 x 4,4 = 1188 jours pour planter 4400 arbres.
36 hommes mettent 1188 : 36 soit 33 jours.

Une solution très algébrisée
Le nombre A d'arbres plantés est proportionnel au nombre J de jours et au nombre H d'hommes qui plantent
On a : A = K x J x H
On sait que 1000 = K x 30 x 9 et 4400 = K x J x 36
Donc J = 33 jours

De la citerne:

Soit une citerne qui a quatre bondes.

Par la première d’entre elles, elle se vide en un jour ;

par la seconde, en deux jours ;

par la troisième en trois jours ;

par la quatrième, en quatre jours.

On cherche à savoir en combien d’heures elle se videra,
si les quatre bondes sont simultanément ouvertes.

Solution :

Avec la première bonde, la citerne se vide une fois en un jour ;

avec la deuxième bonde, la citerne se vide 2 fois en un jour ;

avec la deuxième bonde, la citerne se vide 3 fois en un jour ;

avec la deuxième bonde, la citerne se vide 4 fois en un jour.

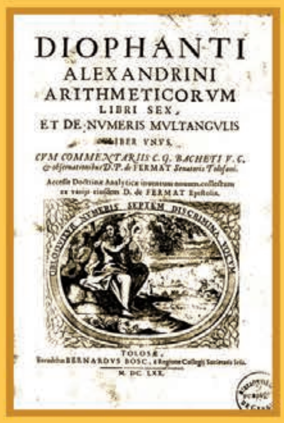
Les quatre bondes étant ouvertes, la citerne se vide 10 fois en un jour.

Donc il faut 2,4 heures soit 2 heures 24 minutes pour la vider avec les 4 bondes.

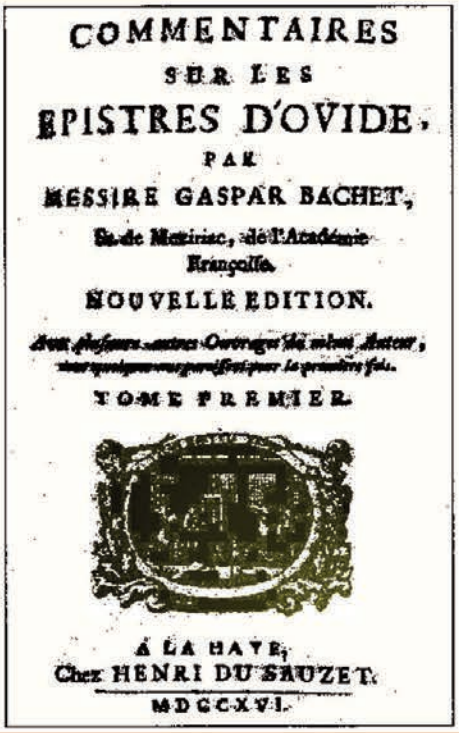
Enigmes et Jeux avec Bachet de Méziriac

Claude Gaspard Bachet de Méziriac, 1581–1638

© Versailles


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& observationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.

TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC,
M. DC. LXX.


COMMENTAIRES
SUR LES
EPISTRES D'OVIDE.
PAR
MESSIRE GASPAR BACHET,
Sr. de Meziriac, de l'Académie Françoise.
NOUVELLE EDITION.
Avec plusieurs autres Ouvrages du même Auteur,
dont quelques-uns paroissent pour la premiere fois.
TOME PREMIER.

A LA HAYE,
Chez HENRI DU SAUZET.
MDCCXVI.


PROBLEMES
PLAISANS ET
DELECTABLES, QVI
se font par les nombres.
Par CLAVDE GASPAR BACHET Sieur de Meziriac.

A LYON,
Chez PIERRE RIGAUD & ASSOCIEZ, rue Merciere, au coing de rue Ferrandiere, à l'Enseigne de la Fortune.
M. DC. XXIIII.

Claude-Gaspar Bachet de Méziriac, honnête homme et humaniste du XVII^e siècle, pratiquait poésie, langues anciennes ou mathématiques avec le même bonheur. Dans ses « Problèmes Plaisants et Délectables qui se font par les nombres », il propose des méthodes de résolution toujours d'actualité.

Bachet fut le premier à conjecturer que :

Tout entier naturel n est la somme d'au plus quatre carrés (éventuellement égaux)

$2007 = 43^2 + 11^2 + 6^2 + 1^2$

Cette conjecture fut démontrée par Lagrange et Jacobi étudiera le nombre de décompositions suivant la valeur de n.

Dans ses écrits, Bachet de Méziriac a proposé une méthode astucieuse de constructions des carrés magiques d'ordre impair.

Bachet de Méziriac (1581-1638)

Historique :

Claude Gaspar Bachet, sieur de Méziriac n'est pas seulement un mathématicien. Il est d'abord un grammairien, spécialiste des langues anciennes : latin, hébreu, grec. Il a aussi écrit des poésies et des chansons. Sa qualité d'expert en langues anciennes l'amena à traduire du grec au latin les *Arithmétiques* de Diophante. Il ne se contentera d'ailleurs pas de les traduire, mais il y ajoutera de nombreux commentaires. C'est dans la marge d'un exemplaire de cette traduction que Fermat notera l'énoncé de son fameux grand théorème.

Il est l'auteur de l'incontournable livre culte " ***Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres ".*** La première édition a vu le jour en 1612 et a été augmentée en 1624
Elle a été rééditée par Albert Blanchard en 1959.

Si les problèmes que contient cet ouvrage sont très souvent empruntés aux mathématiques arabes, Bachet apporte une innovation importante ; il publie un premier ouvrage exclusivement réservé aux jeux mathématiques. Les jeux sont là pour eux mêmes, pour la bonne et simple raison qu'ils sont *délectables et plaisants.*

Problème de traversée :

Trois maris jaloux se trouvent de nuit avec leurs femmes au passage d'une rivière où ils ne trouvent qu' une barque sans batelier, si petite qu'elle ne peut contenir que deux personnes. On se demande comment ces six personnes passeront deux à deux, de telle sorte que jamais aucune femme ne demeure en compagnie d'un ou de deux hommes si son mari n'est pas présent.

Solution :

On peut y arriver en 6 traversées et 5 retours
Notons les maris M1, M2, M3 et leur femme respective F1, F2 et F3

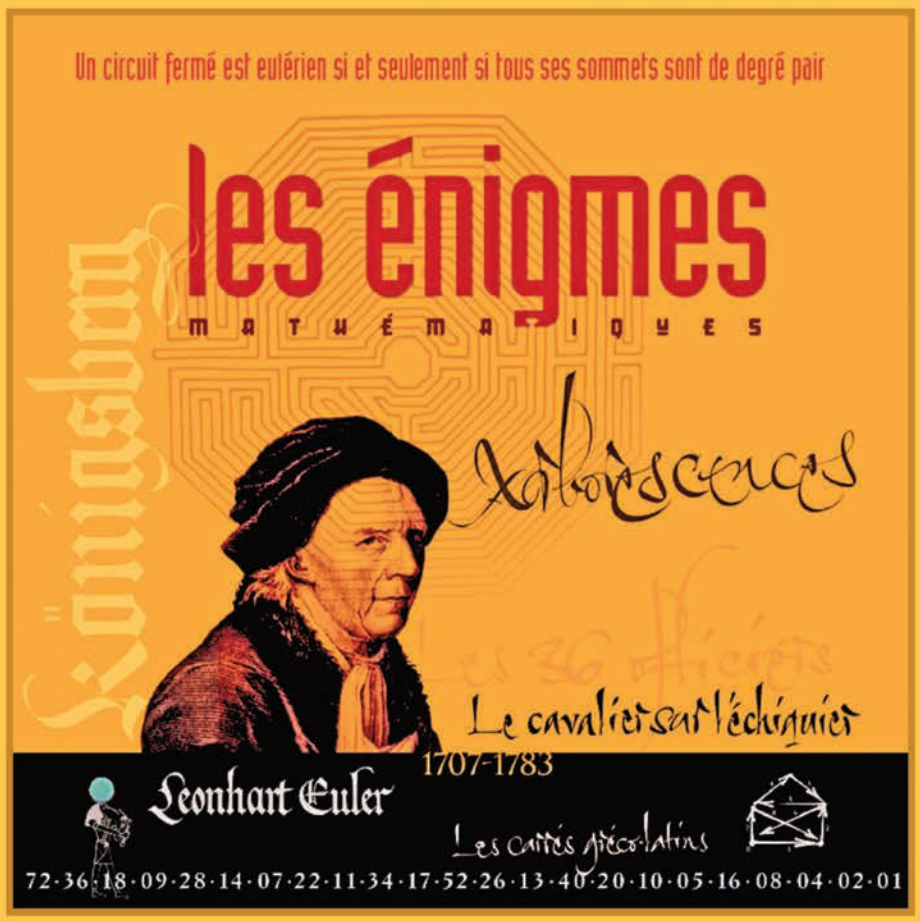
M1 et F1 traversent,	M1 revient,	F1 reste
F2 et F3 traversent ,	F1 revient,	F2 et F3 restent
M2 et M3 traversent,	F2 et M2 reviennent,	F3 et M3 restent
M1 et M2 traversent ,	F3 revient	M1, M2 et M3 restent
F1 et F2 traversent,	M3 revient	M1 avec F1, M2 avec F2 restent
M3 et F3 traversent	et	M1et F1, M2 et F2, M3 et F3 ont traversé

Enigmes et Jeux avec Leonhard Euler

Pour résoudre ce défi :

Comment organiser votre promenade pour franchir une fois et une seule les sept ponts de la ville de Königsberg ?

Euler a proposé une méthode considérée comme fondatrice de la théorie des graphes.



Du problème des 36 officiers
aux carrés gréco - latins du CIJM,
300 ans d'énigmes
tout juste résolues

Leonhard EULER, un grand parmi les plus grands mathématiciens, fut au XVIII^e siècle, aux côtés de Voltaire, Lagrange, Diderot, d'Alembert, l'une des lumières de cette Europe des philosophes, des encyclopédistes et des scientifiques.

Comment faire en sorte que le cavalier visite toutes les cases de l'échiquier une fois et une seule ?

2000 ans d'énigmes et de jeux mathématiques

5

Leonhard EULER

Historique :

Il y a trois cent ans naissait à Bâle en Suisse, **Leonhard Euler,** un des plus grands mathématiciens de tous les temps.

En effet, Euler fut probablement le premier mathématicien européen. Il a traversé le siècle des lumières , rencontrant les plus grands , Voltaire entre autre, à la cours de Frédéric II en Prusse puis auprès de Catherine de Russie. Il se passionna non seulement pour les mathématiques mais aussi pour la physique, l'astronomie, les jeux …
Son œuvre en mathématique est immense et on ne compte plus les formules, constantes, théorèmes, résultats auxquels il a donné son nom. En mathématiques, il s'est passionné pour les domaines les plus variés sans jamais négliger leur composante ludique.

Circuits et chemins eulériens :

L'Enoncé d'Euler

"Dire qu'un graphe connexe possède un cycle eulérien
est équivalent à dire que tous ses sommets sont de degré pair."

Quelques définitions en théorie des graphes :

Un graphe est constitué de sommets dont certains sont reliés par des arêtes.

Deux sommets reliés par une arête sont dits adjacents.

L'ordre d'un graphe est le nombre de sommets du graphe.

Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.

Une chaîne est une liste ordonnée de sommets telle que chaque sommet soit adjacent au suivant. Une chaîne fermée est un cycle .

Un graphe est connexe s' il existe une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe.

Parcours du cavalier :

Léonhard Euler a étudié plusieurs problèmes liés au jeu d'échec. La marche du cavalier est suffisamment originale pour avoir susciter bien des questions

Un cavalier d'échec parcourt la grille suivante, passant par toutes les cases de la première numérotée 1 à la dernière numérotée 25. Numérotez un chemin.

Ci-joint une des nombreuses solutions

7	20	25	14	1
12	15	8	19	24
21	6	13	2	9
16	11	4	23	18
5	22	17	10	3

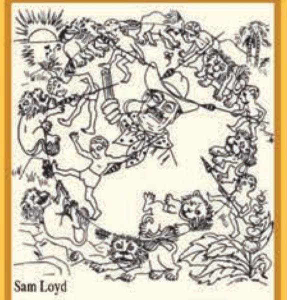
Euler et les Carrés gréco latins

Le problème des 36 officiers d'Euler pose un problème de carré gréco-latin d'ordre 6 (un carré latin pour les régiments, un carré latin pour les grades), problème dont la résolution , on le sait aujourd'hui, est impossible. Euler l'avait déjà pressenti à l'époque, sans toutefois donner une démonstration formelle à cette conjecture. Il dira :
« *Or, après toutes les peines qu'on s'est données pour résoudre ce problème, on a été obligé de reconnaître qu'un tel arrangement est absolument impossible, quoiqu'on ne puisse pas en donner de démonstration rigoureuse* ».
Euler pensait qu' il n'existe pas des carrés gréco-latins d'ordre 4n + 2 (donc 2, 6, 10, ...).
La non-existence de carrés gréco-latins d'ordre six a été définitivement confirmée en 1901 par la mathématicien français Gaston Tarry qui fit l'énumération exhaustive de tous les arrangements possibles de symboles.
Cinquante-huit ans plus tard, en 1959, avec l'aide d'ordinateurs, deux mathématiciens américains, Bose et Shrikhande trouvèrent des contre-exemples à la conjecture d'Euler. La même année, Parker trouva un contre-exemple d'ordre dix.

En 1960, Parker, Bose et Shrikhande démontrèrent que seuls les carrés gréco-latins d'ordre 2 et 6 n'existent pas.

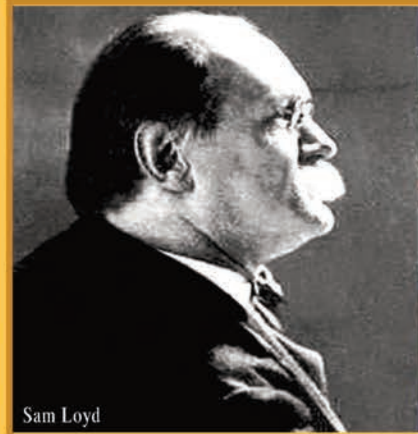
Un jeu original du CIJM :
les carrés d'Euler ou un double sudoku

Enigmes et Jeux avec S.Loyd et H.Dudeney

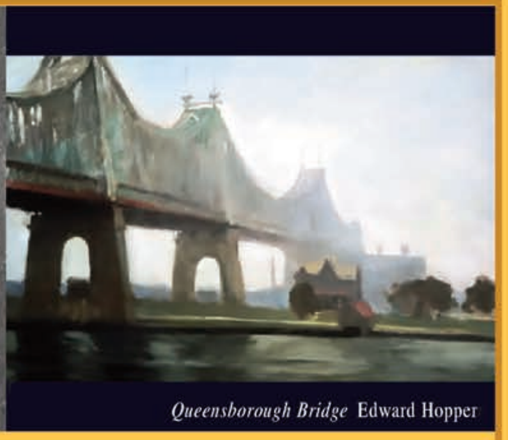


Sam Loyd

Teddy et les lions
Sont-ils sept ou huit ?

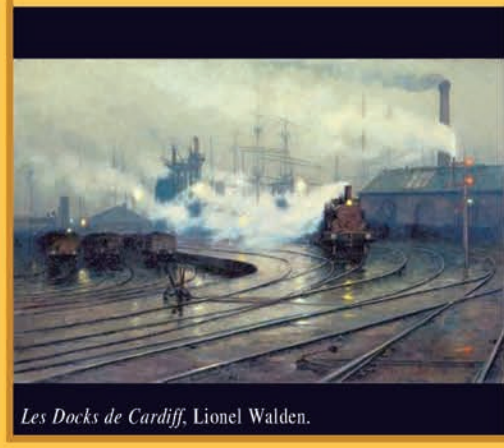


Sam Loyd

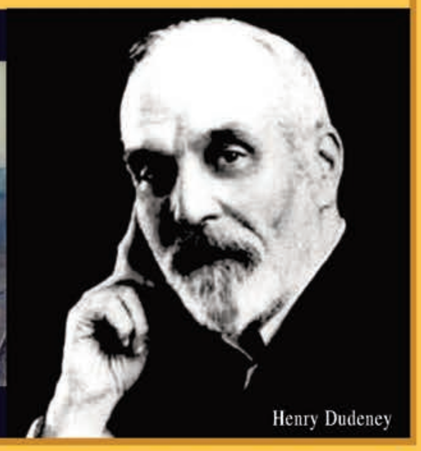


Queensborough Bridge Edward Hopper

Sam Loyd promit 1000 dollards à celui qui trouverait la suite de mouvements permettant d'échanger le 14 et le 15, les autres nombres restant à leur place. Une proposition sans risque pour lui !

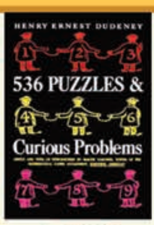


Les Docks de Cardiff, Lionel Walden.



Henry Dudeney

La révolution industrielle fut aussi un creuset des esprits. L'américain Sam Loyd et l'anglais Henry Dudeney rivalisèrent de chaque côté de l'Atlantique d'inventions ludiques , se jalousant parfois. Ils nous laissent en héritage, pour notre plus grand plaisir, énigmes et casse-têtes.



$$\begin{array}{r} \text{SEND} \\ +\,\text{MORE} \\ \hline \text{MONEY} \end{array}$$

Une élégante façon de présenter la note à son éditeur !

Du triangle au carré avec H.E.Dudeney

Sam Loyd (1841-1911)

Historique :

Samuel Loyd est né à Philadelphie en 1841. Joueur d'échecs depuis son plus jeune âge, il publie son premier problème d'échecs à l'âge de 14 ans. Le jeu d'échecs et la composition de problèmes l'occupent à tel point qu'il finit par quitter les bancs de l'école à l'âge de dix-sept ans. Contraint de gagner sa vie, il se lance dans le journalisme en proposant à divers journaux des rubliques et des problèmes d'échecs.
Bien qu'étant un joueur d'échecs moyen, Sam Loyd a composé des centaines de problèmes d'échecs, certains avec une bonne dose d'humour et de fantaisie.
Un exemple est ce problème où il demande de trouver une méthode permettant de mettre mat un roi isolé au milieu d'un échiquer à l'aide de deux tours et d'un cavalier, ... sans préciser que les dimensions de l'échiquier comportait seulement trois rangées de quatre cases !
A partir de 1870, Sam Loyd se désintéresse des échecs et se lance dans l'invention de casse-tête mathématiques, qu'il diffuse dans les journaux et magazines ainsi que par la publicité.

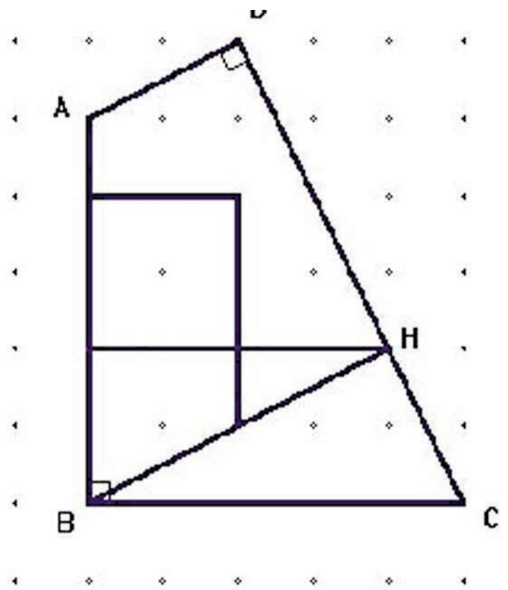
Le puzzle de Sam Lloyd

Constitué de cinq pièces, il est présenté ci-dessous sous la forme d'un quadrilatère.

Ce quadrilatère a quelques particularités qui rendent intéressante son étude :

- il possède deux côtés consécutifs égaux

- deux de ses angles opposés sont droits



- les deux côtés qui ne sont pas égaux sont dans le rapport 3.

Différentes activités :

- tracé à la règle et au compas

- construction sur quadrillage

- distribution des pièces du puzzle puis reconstruction du quadrilatère de base

Différentes exploitations, à plusieurs niveaux :

·on peut se contenter de reconstituer des figures,

- fabriquer un carré, un rectangle, une croix grecque, un rectangle et un T ,

- faire des calculs d’aires et de périmètres.

Henri Ernest Dudeney (1857-1930)

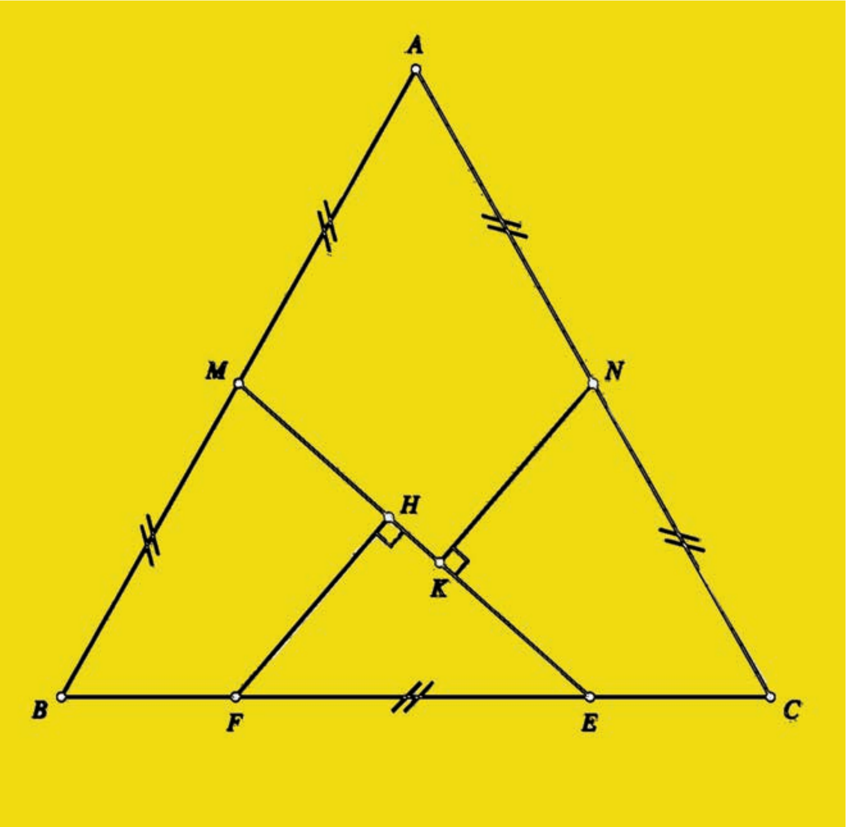
Historique :

Plus jeune que Loyd de seize ans, **Henri Ernest Dudeney** nourrissait la même passion que son aîné pour le jeu d'échecs et pour les énigmes à ressort mathématique. Il commença très tôt à proposer ses créations à plusieurs magazines anglais. A partir de 1890, Dudeney collabora avec Sam Loyd pour le magazine anglais Tit-Bits. Par la suite, Dudeney et Sam Loyd décidèrent d'échanger leurs énigmes qu'ils proposaient à des journaux différents, ce qui explique que l'on retrouve parfois des énigmes identiques chez les deux auteurs sans savoir qui en est le véritable créateur. Mais Dudeney finit par s'offusquer du fait que Sam Loyd ne le citait pas toujours comme étant l'inventeur de certains jeux dans les livres qu'il publait.
Si Sam Loyd possédait d'incontestables dons de mise en scène des énigmes qu'il créait, Dudeney était davantage mathématicien.

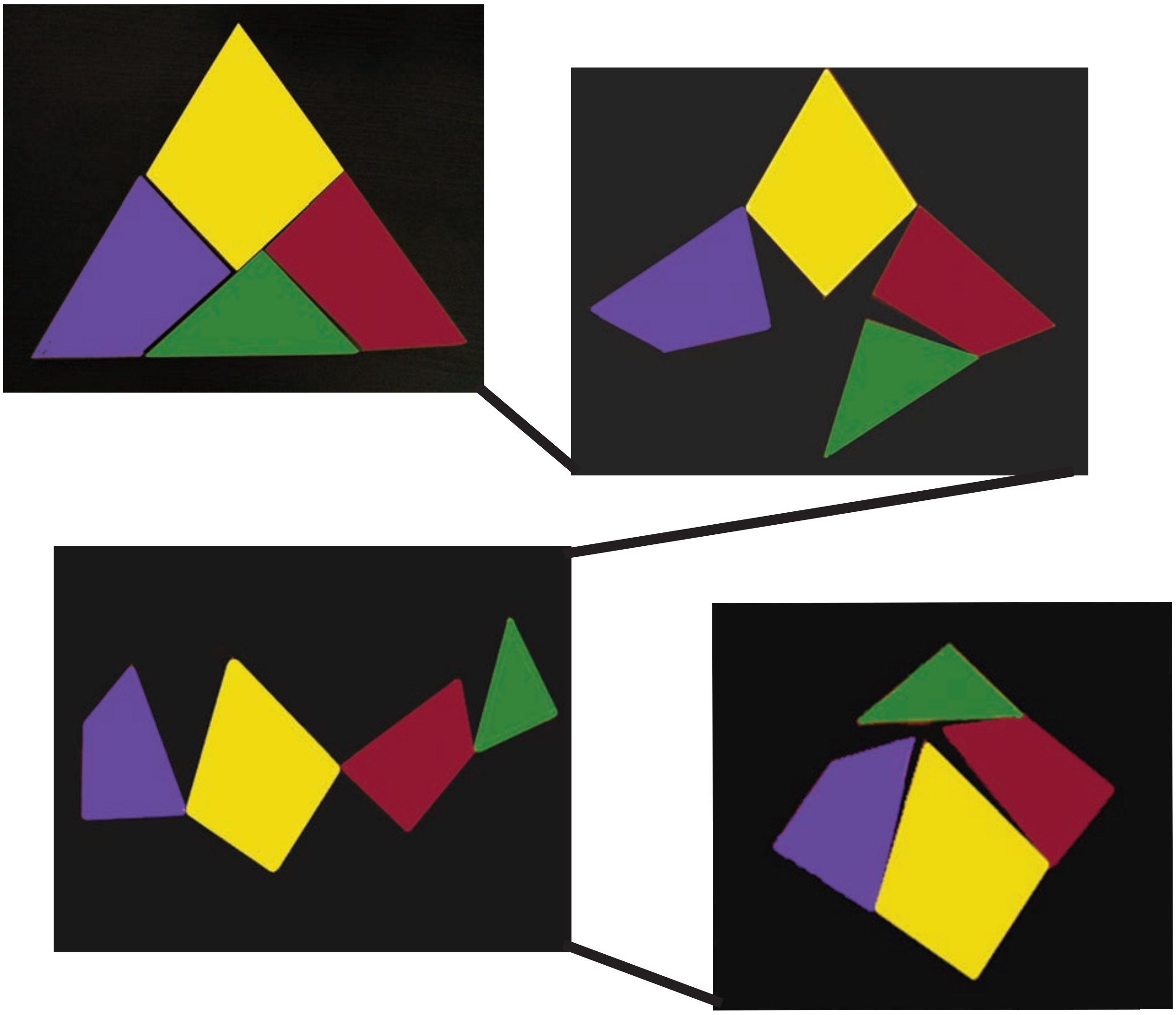
Puzzle de Dudeney

Voici une construction du puzzle.

Soit un triangle ABC équilatéral de côté a. Placer M, milieu de [AB] puis tracer un cercle de centre M de rayon le côté du carré à obtenir (soit 1/2(a x $3^{1/4}$). Ce cercle coupe [BC] en E.
Tracer le segment [ME].
Le cercle de centre E, de rayon AM coupe [BC] en F.
Soit H le pied de la perpendiculaire abaissée de F sur [ME] et K le pied de la perpendiculaire abaissée de N, milieu de [AC], sur [ME].



et son animation



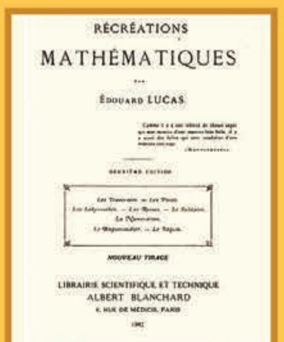
Cryptarithme

S E N D + M O R E = M O N E Y

La solution du cryptarithme est :

9 567 + 1 085 = 10 652

Enigmes et Jeux avec Edouard Lucas


RÉCRÉATIONS
MATHÉMATIQUES
ÉDOUARD LUCAS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE
ALBERT BLANCHARD

4 tomes pour unir jeux et mathématiques

A la recherche d'une stratégie pour les tours de Hanoï

le baguenaudier

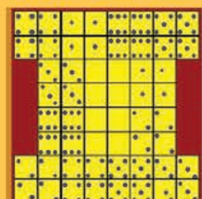
« Si ces pages inspirent à quelques jeunes intelligences le goût du raisonnement et le désir des jouissances abstraites, alors je serai satisfait. »

Edouard Lucas

Récréations Mathématiques

Le moulin rouge

La citadelle du temps, un circuit eulérien revisité par Edouard Lucas



Les Quadrilles de Lucas

Placez en quadrilles les 28 dominos d'un jeu pour former une figure qui comprendra quatre quadrilles dans chacune des rangées supérieures et inférieures, et trois quadrilles dans chacune des deux rangées intermédiaires.

Il existe 171 360 solutions différentes.

Edouard Lucas

Historique :

Edouard Lucas (1842 - 1991) est un grand mathématicien français de la fin du 19e siècle. Son apport aux mathématiques se situe principalement en théorie des nombres, notamment dans l'étude des nombres premiers. Un test de primalité porte d'ailleurs le nom de " *test de Lucas-Lehmer* ".

Mais Lucas est aussi un pionnier de la popularisation des mathématiques par le jeu, avec les quatre tomes de ses *Récréations Mathématiques* et son *Arithmétique Amusante,* qui constituent une véritable encyclopédie des récréations mathématiques.

Edouard Lucas pensait que chaque notion mathématique pouvait être présentée aux jeunes et au grand public sous la forme d'un jeu ou d'une énigme : " *si ces pages inspirent à quelques jeunes intelligences le goût du raisonnement et le désir des jouissances abstraites, alors je serai satisfait* ".
Seuls les deux premiers tomes des Récréations de Lucas ont paru de son vivant. Décédé prématurément en 1891 à la suite d'une infection, Edouard Lucas ne verra pas la publication des deux derniers tomes, réalisée par ses amis à partir des notes qu'il a laissées. Il en est de même pour *L'Arithmétique Amusante,* éditée à partir d'un projet de livre retrouvé chez Lucas.

Les tours de Hanoï

Le plus célèbre des jeux popularisés par Edouard Lucas reste la tour de Hanoï dont il est par ailleurs l'inventeur. Ce jeu est conçu pour expliquer la numération binaire.
Voici la présentation qu'en fait Lucas :
" *Un de nos amis, le professeur N. Claus (de Siam) mandarin du collège de Li-Sou-Stian, a publié, à la fin de l'année dernière, un jeu inédit qu'il a appelé la Tour d'Hanoï, véritable casse-tête annamite qu'il n'a pas rapporté du Tonkin, quoi qu'en dise le prospectus. Cette tour se compose d'étages superposés et décroissants, en nombre variable, représentés par huit pions en bois percés à leur centre, enfilés dans l'un des trois clous fixés sur une tablette. Le jeu consiste à déplacer la tour en enfilant les pions sur un des deux autres clous et en ne déplaçant qu'un seul étage à la fois, mais avec défense expresse de poser un étage sur un étage plus petit. Le jeu est toujours possible et demande deux fois plus de temps chaque fois que l'on ajoute un étage à la tour ...* ".
Le nom prétendu de l'inventeur du jeu, N. Claus de Siam, mandarin de Li-Sou-Stian est tout simplement l'anagramme de "Lucas d'Amiens, professeur au lycée Saint Louis ". Lucas aimait agrémenter ses récréations de pointes d'humour.

Il rapporte également la légende d'une tour de Hanoï situé à Bénarès et comportant soixante-quatre disques. Lorsque les $2^{64} - 1 = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615$ mouvements nécessaires au transport des soixante-quatre disques auront été effectués,
" les brahmes tomberont et ce sera la fin du monde ! ".
Pour déplacer n disques, il faut au minimum $2^n - 1$ mouvements.

Exemple avec 4 disques
et quinze mouvements

1

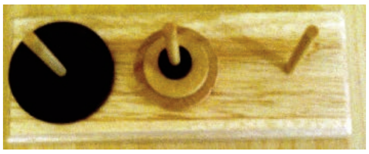
2

3

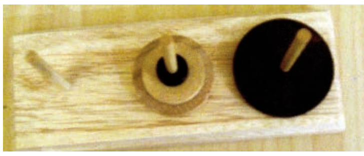
4

5

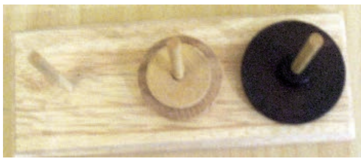
6



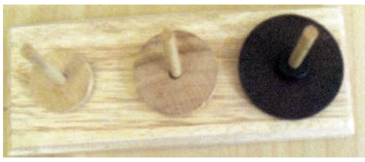
7



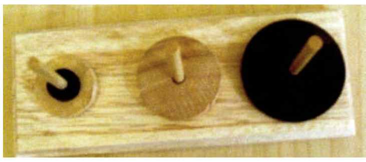
8



9

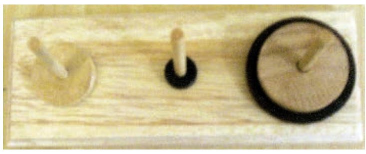


10



11

12



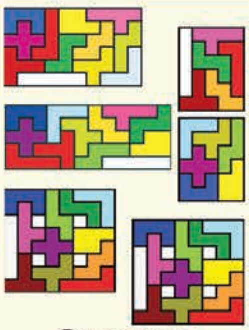
13

14

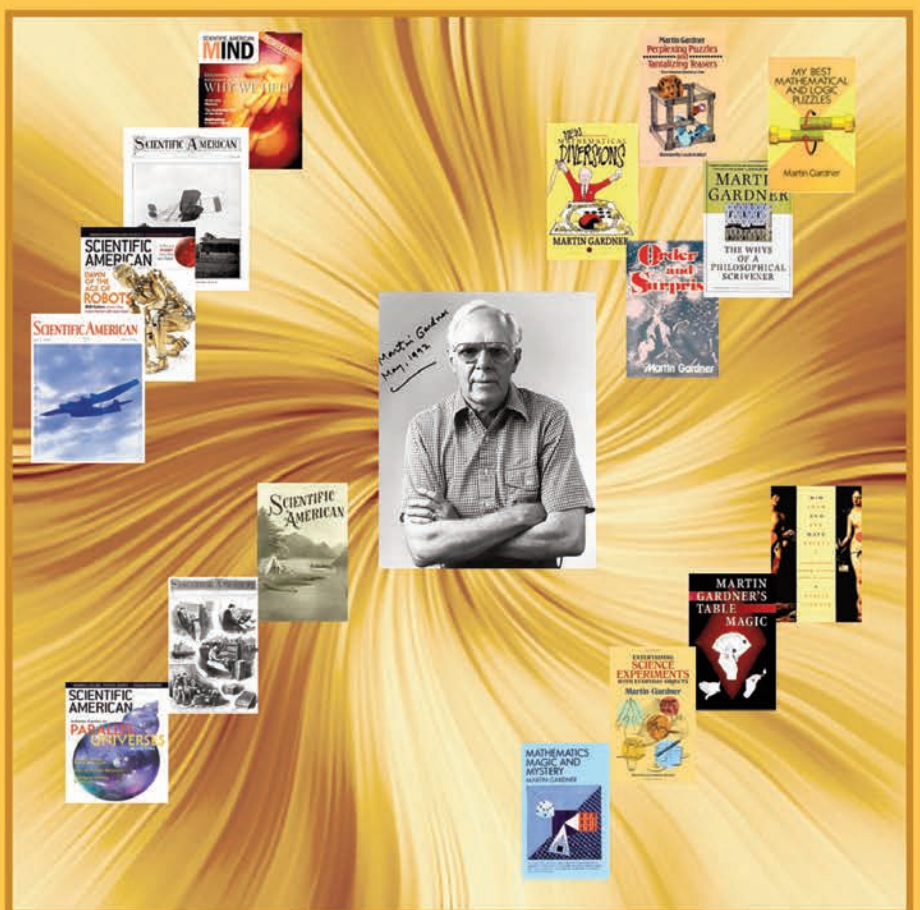
15

Enigmes et Jeux avec Martin Gardner

Un flexagone au Palais de la découverte



Des pavages en pentaminos



Avec Martin Gardner, journaliste et écrivain, la grande presse a ouvert ses colonnes à de nombreux problèmes mathématiques. Un large public a ainsi pu découvrir l'immense diversité de cette science et de ses chercheurs : de Penrose à Escher, de Conway aux auteurs du codage RSA... .

John Conway et son jeu de la vie

Un pavage de Roger Penrose

Anges et démons de Maurits Escher

Martin Gardner

Historique :

Martin Gardner est né le 21 octobre 1914 à Tulsa, Oklahoma. Il suivi les cours de l'université de Chicago où il obtint une licence de philosophie, mais pas sa maîtrise. Sa prodigieuse culture générale est le résultat de ses innombrables lectures et de ses infatigables recherches en bibliothèques.

Martin Gardner adulte sera le champion des jeux mathématiques et des mathématiques amusantes. En un sens, il a popularisé ce genre en lui donnant ses lettres de noblesse. Il faut dire qu'à l'époque de sa jeunesse les livres sur le sujet étaient rares, il y avait bien quelques années auparavant des précurseurs comme le génial Lucas , Loyd, Dudeney....

La popularité de Martin Gardner est essentiellement due, au départ, à sa rubrique Mathematical Games du Scientific American qui commença en 1956 et s'arrêta en 1982 mais qui fut publié par Pour la Science, à partir de 1977 dans son édition française . En 1983, Gardner fut désigné écrivain scientifique de l'année en 1983 par l'institut Américain de Physique.

Martin Gardner popularisera de nombreux sujets. On ne peut que faire un choix difficile pour en citer quelques uns . Les Polyominos sont des figures obtenues en collant des carrés par leurs côtés. Les cubes de Soma que lui avait confié le danois Piet Hein inventeur aussi du jeu de Hex. Le célèbre jeu de la vie de John Conway est un jeu de simulation qui devint si populaire qu'à l'époque les rares ordinateurs furent paralysés pendant des semaines, occupés par ce jeu. Les pavages de Roger Penrose, pavage du plan apériodique à partir de deux pièces de base qui ont trouvé des applications inattendus en cristallographie. N'oublions pas que c'est aussi, dans le monde de l'art, Martin Gardner a fait connaître au grand public l'œuvre de Maurits Escher.

Comme on ne peut pas parler de tout, signalons la richesse des pavages de Penrose

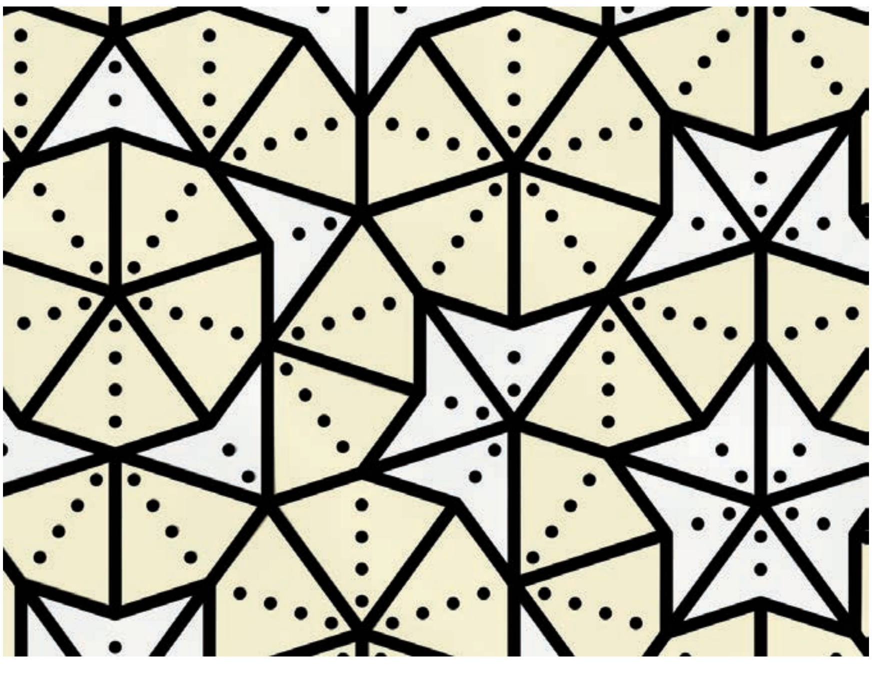
Roger Penrose

Historique :

Physicien et mathématicien anglais, Roger Penrose est diplômé de l'université de Cambridge en géométrie algébrique.
Professeur à Oxford, il reçoit en 1998 le prix Wolf pour la physique.
Né en Angleterre le 8 août 1931 à Colchester (Essex), Roger Penrose était le second d'une famille de 3 enfants. A l'instar de leurs parents, tous deux médecins, son frère Olivier, de deux ans son aîné, a lui aussi montré très jeune un grand intérêt pour les mathématiques. Quant à son frère cadet, Jonathan, il fut l'un des meilleurs joueurs d'échec de son époque.
Roger Penrose s'est intéressé aux pavages non périodiques du plan. Son intention n'était pas alors d'ouvrir un nouveau champ aux mathématiques ou à la physique mais de créer un divertissement mathématique.

Et de fait ces pavages ne seraient restés qu'un joli divertissement si, entretemps, n'avaient été étudiés par des chercheurs, des cristaux possédant une quasi-symétrie d'ordre 5, et pour lesquels les pavages de Penrose fournissait un très bon modèle.

Comme quoi, Penrose avait raison quand il disait à propos de ses recherches :
" On ne sait jamais quand on perd son temps " !!



Comité International des Jeux Mathématiques
Association nationale de jeunesse et d'éducation populaire
Association agrée par l'Éducation Nationale

CIJM - Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 PARIS Cedex 05

cijm@cijm.org N° SIRET : 433 879 343 00047 APE 927 C

www.cijm.org