Tournoi Mathématique du Limousin

Présentation

Historique

Le tournoi a été créé en 1987 par une équipe de professeurs soutenue par :

- la régionale de Limoges de l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public),
- le département de Mathématiques de la Faculté des Sciences de Limoges,
- l'IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) de Limoges,
- l'Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques de l'académie de Limoges.

Compétition

► **Nombre de participants**

Environ 4 000 élèves de collèges et 2 000 élèves de lycées (y compris les lycées professionnels).

► **Niveaux d'études**

Classes de quatrième pour les collégiens, toutes classes de lycées.

► **Type d'épreuves proposées**

Une seule épreuve, de deux heures pour les quatrièmes et les lycées professionnels, de trois heures pour les lycéens ; l'épreuve est composée de 4 problèmes à résoudre par équipes de deux.

► **Fréquence**

Chaque année à la fin du mois de janvier ; la remise des prix se déroule devant un public nombreux au mois de mai.

Liste des principaux partenaires

Conseil Régional de Nouvelle Aquitaine, Fondation Partenariale de l'Université de Limoges, Faculté des Sciences et Techniques de Limoges, Département de Mathématiques de la Faculté des Sciences et Techniques de Limoges, ÉSPÉ de l'Académie de Limoges, Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, Comité International des Jeux Mathématiques, Calculatrices CASIO, Calculatrices TEXAS INSTRUMENTS, Association Limousine des Sports Aériens.

Contacts : IREM de Limoges

✉ 123 avenue Albert Thomas 87060 Limoges Cedex
☎ +33 (0)5 55 45 72 49
🖷 +33 (0)5 55 45 73 20
@ irem@unilim.fr
www.irem.unilim.fr

Divers

Trois brochures éditées aux PULIM permettent une utilisation des sujets en classe.

Organisation d'une après-midi « Mathématiques pour tous », à la BFM (bibliothèque) de Limoges, avec présentation de jeux mathématiques issus de sujets du Tournoi qui ont été transformés en activités mathématiques ludiques pour écoliers, collégiens, lycéens ou grand public.

Jeu de cubes (2017, niveau : 4e)

Énoncé

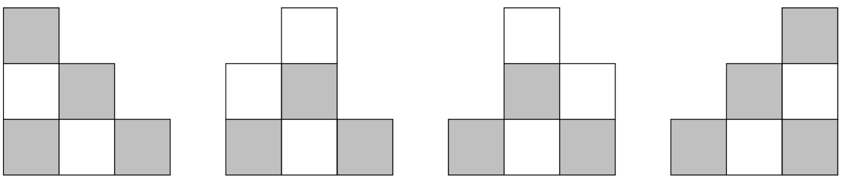
On forme un empilement de cubes à n étages en respectant les règles suivantes :

— en bas on aligne n cubes côte à côte ;

— on surmonte chaque rangée d'une rangée possédant un cube de moins, ces cubes étant côte à côte, chaque cube étant placé exactement sur un cube de la rangée en dessous ;

— enfin, on colorie en gris un cube sur deux, comme sur un damier, en commençant par un cube gris en bas à gauche

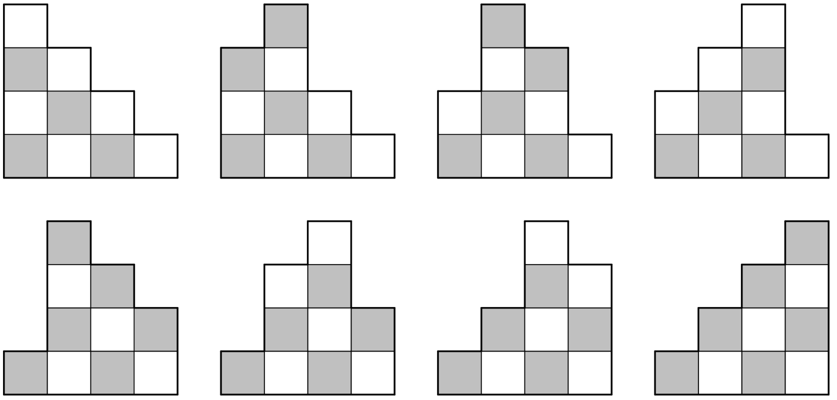
Voici par exemple les quatre empilements possibles pour n=3. On remarque qu'il y a 3 ou 4 cubes gris.



1. Dessinez sur une feuille quadrillée tous les empilements possibles pour $n = 4$.
   Quelles sont les valeurs possibles pour le nombre de cubes gris ?
   Même question avec $n = 6$.
2. Pour $n = 4$, combien de configurations ont le même nombre de cubes gris que de cubes blancs ?
   Pour quels entiers inférieurs à 10 existe-t-il des configurations avec le même nombre de cubes gris que de cubes blancs ?

Solution

1. Pour $n = 4$, il y a 4, 5 ou 6 cubes gris.



   Pour $n = 6$, on obtient 9 cubes gris si on place les cubes le plus à gauche possible, 12 cubes gris si on les place le plus à droite possible. En les plaçant différemment on peut aussi obtenir 10 cubes gris et 11 cubes gris.

2. Pour $n = 4$, il y a 10 cubes au total. Les configurations qui ont le même nombre de cubes gris que de cubes blancs sont donc les configurations qui ont 5 cubes gris. Il y en a 4.

   Une configuration avec le même nombre de cubes gris et de cubes blancs ne peut exister que si le nombre total de cubes est pair. Ce nombre total prenant comme valeurs 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, et 45 quand n varie de 1 à 9, cela n'est possible que pour $n = 3$ (6 cubes au total), $n = 4$ (10 cubes au total), $n = 7$ (28 cubes au total) et $n = 8$ (36 cubes au total).

   On vérifie que pour $n = 7$ et $n = 8$ il existe bien une configuration avec le même nombre de cubes gris et de cubes blancs.

On peut généraliser à un empilement ayant n cubes à la base. Pour chaque rangée ayant un nombre pair de cubes il y a autant de cubes gris que de blancs. Pour chaque rangée ayant un nombre impair de cubes il y a un cube gris en plus ou bien un en moins : il ne peut donc y avoir le même nombre de cubes gris que de cubes blancs que s'il y a un nombre pair de rangées ayant un nombre impair de cubes, c'est-à-dire si n est de la forme $4k - 1$ ou $4k$.

Commentaires

C'est un exercice de dénombrement abordable par tous. La première question n'est pas difficile pour $n = 4$ en dessinant toutes les possibilités. Pour $n = 6$, on ne doit pas dessiner toutes les possibilités (il y en a 32) mais seulement placer les cubes pour avoir le maximum (ou bien le minimum) de cubes gris.

Pour la seconde question il faut observer qu'un nombre pair pour le nombre total de cubes est nécessaire puis calculer ce nombre total pour les différentes valeurs de n.

L'exercice a été assez bien réussi. Même si la règle de disposition des cubes est un peu compliquée, l'exemple fourni montre bien ce que l'on attend. Les questions sont assez simples et cela ressemble à un jeu (de cubes !).

Bien divisibles **(2018, niveau : 4^{e} [questions 1 à 3] et lycéens)**

Énoncé

1. Un entier N s'écrit avec les chiffres 1, 2 et 3 (une fois chacun) dans un certain ordre.

   Déterminer N sachant que pour $k = 2$ et $k = 3$ l'entier formé par les k premiers chiffres de N (en commençant par la gauche) est divisible par k.
2. Existe-t-il un entier N s'écrivant avec les chiffres 1, 2, 3 et 4 (une fois chacun) dans un certain ordre tel que, pour chaque entier k de 2 à 4, l'entier formé par les k premiers chiffres de N (en commençant par la gauche) est divisible par k ?
3. Quels sont les entiers N s'écrivant avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 et 6 (une fois chacun) dans un certain ordre tels que, pour chaque entier k de 2 à 6, l'entier formé par les k premiers chiffres de N (en commençant par la gauche) est divisible par k ?
4. Quels sont les entiers N s'écrivant avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 (une fois chacun) dans un certain ordre tels que, pour chaque entier k de 2 à 8, l'entier formé par les k premiers chiffres de N (en commençant par la gauche) est divisible par k ?

Solution

1. L'entier formé par les 2 premiers chiffres de N étant divisible par 2, son chiffre des unités est pair et ne peut donc être que 2. Il reste deux possibilités : N = 123 et N = 321.

   Elles conviennent puisque ces deux nombres sont divisibles par 3.

2. Pour la même raison que précédemment le deuxième chiffre de N doit être pair, c'est donc 2 ou 4. Puisque N doit être divisible par 4 son chiffre des unités doit être pair, c'est donc 2 ou 4. Il y a quatre possibilités à examiner pour N : 1 234 et 3 214 ne conviennent pas car ils ne sont pas divisibles par 4 ; 1 432 et 3 412 ne conviennent pas non plus car l'entier formé par les 3 premiers chiffres n'est pas divisible par 3. Il n'y a donc pas de solution.

3. Pour la même raison que précédemment les deuxième, quatrième et sixième chiffres de N doivent être pairs. Le cinquième chiffre est nécessairement 5 car un entier divisible par 5 a son chiffre des unités égal à 0 ou 5, 0 étant exclu ici.

   Il y a donc deux possibilités : N = 1P3 P5P ou N = 3P1 P5P, les P représentant chacun un chiffre pair (2, 4 ou 6).

   L'entier formé par les 3 premiers chiffres de N devant être multiple de 3, la somme des trois premiers chiffres doit être divisible par 3 : le deuxième chiffre de N est donc un 2.

   Comme 1 234 et 3 214 ne sont pas divisibles par 4, le quatrième chiffre de N est donc un 6.

   Les deux entiers N = 123 654 et N = 321 654 conviennent puisqu'ils sont divisibles par 6.

4. Pour la même raison que précédemment les deuxième, quatrième, sixième et huitième chiffres de N doivent être pairs et le cinquième chiffre est nécessairement 5.

   La somme des six premiers chiffres de N doit être divisible par 3 ; comme la somme des chiffres de 1 à 8 vaut 36 qui est un multiple de 3, la somme des deux derniers chiffres de N doit être multiple de 3. N devant être divisible par 8 et comme 200 est divisible par 8, le nombre formé par les deux derniers chiffres de N doit aussi être divisible par 8 : c'est donc un multiple de 24 et la seule possibilité est 72. Il y a donc deux cas à étudier : N = 1P 3P5 P72 et N = 3P 1P5 P72, chaque P représentant un chiffre pair (4, 6, 8).

   La somme des trois premiers chiffres doit être multiple de 3 donc le second chiffre est un 8.

   Le nombre formé par les quatre premiers chiffres doit être multiple de 4 donc le quatrième chiffre est un 6.

Le sixième chiffre est alors un 4. Comme 1 836 547 n'est pas divisible par 7 (après calcul) alors que 3 816 547 l'est, il y a une unique solution : N = 38 165 472.

Commentaires

Ce sujet ne demande que des connaissances élémentaires sur la divisibilité par 2, 3, 4 et 5.

La première question est très facile, la seconde aussi si on comprend que la réponse à la question peut être négative.

Les deux dernières questions demandent de la méthode pour placer d'abord le chiffre 5 puis envisager les différents cas pour placer les chiffres impairs.

L'exercice a été assez bien réussi même si les justifications n'ont pas toujours été fournies.

Seule la dernière question a été plus rarement résolue, bien que l'aide de la calculatrice facilite les calculs. On peut d'ailleurs écrire un programme qui teste toutes les permutations des entiers de 1 à 8 : il n'y en a que 8! = 40 320, c'est donc faisable par une calculatrice.

On peut prolonger l'exercice en montrant qu'il n'y a pas de solution pour les entiers de 1 à 5 ainsi que pour les entiers de 1 à 7, mais qu'il y a une unique solution pour les entiers de 1 à 9 : N = 381 654 729.

Tableaux symétriques (2018, niveau : lycéens)

Énoncé

On veut former un tableau à n lignes et n colonnes, symétrique par rapport à sa première diagonale (celle qui débute en haut à gauche), de première ligne composée des nombres 1, 2, ..., n dans cet ordre, les autres lignes étant des permutations de la première ligne.
Par exemple les permutations de (1 ; 2 ; 3) sont (1 ; 2 ; 3), (1 ; 3 ; 2), (2 ; 1 ; 3), (2 ; 3 ; 1), (3 ; 1 ; 2) et (3 ; 2 ; 1).

1. Montrez qu'il y a une seule possibilité pour $n = 2$ et $n = 3$.
2. Trouvez toutes les possibilités pour $n = 4$.
3. Parmi les cas précédents, dans quels cas la première diagonale est-elle une permutation de $(1, 2, \ldots, n)$?
4. Généralisation : montrez que si n est impair la première diagonale est toujours une permutation de $(1, 2, \ldots, n)$ alors que si n est pair la première diagonale n'est jamais une permutation de $(1, 2, \ldots, n)$.

Solution

1. Pour $n = 2$, le seul tableau est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   Pour n=3, on a déjà par symétrie $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & & \\ 3 & & \end{pmatrix}$. Puisqu'il y a symétrie par rapport à la première diagonale, chaque colonne est une permutation de la première colonne. Par conséquent la seconde ligne est nécessairement $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et la troisième $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Il y a donc une unique solution : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. 1$^{\text{er}}$ cas (avec la symétrie) : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & & \\ 3 & & & \\ 4 & & & \end{pmatrix}$. On complète ensuite la seconde ligne (et la seconde colonne) par $\begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix}$ d'où deux tableaux $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2e cas : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & & \\ 3 & & & \\ 4 & & & \end{pmatrix}$ complété en $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & & \\ 4 & 1 & & \end{pmatrix}$ puis en $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3e cas : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & & \\ 3 & & & \\ 4 & & & \end{pmatrix}$ complété en $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & & \\ 4 & 3 & & \end{pmatrix}$ puis en $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Il y a donc quatre tableaux convenables.

3. La première diagonale est une permutation de la première ligne dans un seul des tableaux précédents, celui obtenu pour $n = 3$.
4. Chaque entier k, compris entre 1 et n, apparaît n fois dans le tableau. Par symétrie il apparaît un nombre pair de fois en dehors de la première diagonale.
   — Si n est impair, chaque entier k apparaît un nombre impair de fois sur la première diagonale, donc au moins une fois, ce qui entraîne que chaque entier k apparaît exactement une fois sur la première diagonale qui est bien une permutation de la première ligne.
   — Si n est pair, chaque entier k apparaît un nombre pair de fois sur la première diagonale qui n'est donc pas une permutation de la première ligne.

Commentaires

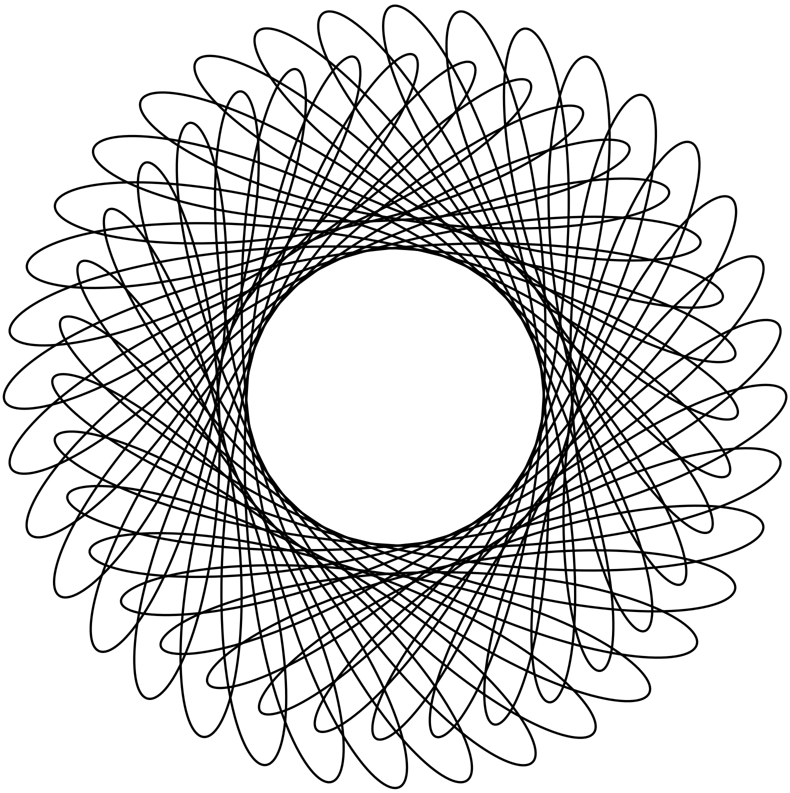
Il y a une difficulté au départ pour bien comprendre que par la symétrie du tableau, chaque ligne et chaque colonne est une permutation des entiers de 1 à n.

Une fois que c'est compris, le remplissage du tableau demande simplement de la rigueur pour ne pas oublier de cas.

La dernière question est un théorème mathématique dont la démonstration est très simple si on observe que la symétrie du tableau entraîne que le nombre d'occurrences en dehors de la diagonale de chaque entier est un entier pair.

Les réponses ont été trouvées pour la majorité même si les justifications n'ont pas été fournies en général.

Seule la dernière question n'a été résolue que par les meilleurs.



$$\begin{cases} x(t) &= -67\cos(43t+28)-70\cos(7t)-73\cos(-29t-132) \\ y(t) &= -67\sin(43t+28)-70\sin(7t)-73\sin(-29t-132) \end{cases}$$