Rallye Mathématique de Poitou-Charentes

Présentation

Le Rallye Mathématique de Poitou-Charentes est une compétition en classes complètes. Depuis 2004, un thème (recherche documentaire) est proposé avec l'envoi de l'épreuve d'entraînement : questions historiques et mathématiques concernant le thème. Les élèves doivent donc réunir une documentation et préparer un dossier en fonction des questions posées et des pistes données. Ce dossier sera complété par les questions de l'épreuve finale. Voici, depuis 2004, les thèmes choisis : Sophie Germain, Marie Agnesi, Ératosthène, Alicia Boole-Stott, π, le nombre d'or, les numérations, la magie des maths, des outils pour tracer, les codes secrets, les puzzles, le temps, les pliages et, en 2017, nombres, formes et jeux.

La classe doit donc fournir un dossier sur le thème et le bulletin-réponse de la partie « problèmes ». Ceux-ci sont variés pour que chaque élève puisse participer et, à partir de la quatrième, l'un des problèmes est énoncé en trois langues étrangères. Toutes les épreuves du Rallye se trouvent sur le site de la Régionale APMEP de Poitou-Charentes :

apmep.poitiers.free.fr/spip.php?rubrique8

Historique

— 1991 : Création du Rallye pour les 3$^{\text{e}}$ et les 2$^{\text{nde}}$.

— 2007 : Extension aux classes de 6$^{\text{e}}$, 5$^{\text{e}}$ et 4$^{\text{e}}$.

— 2008 : Réduction de la durée de l'épreuve à une heure pour les classes de collège.

— 2011 : Première cérémonie de remise des prix.

— 2013 : Passation des épreuves pendant la Semaine des Mathématiques.

— 2014 : Extension aux classes de 2$^{\text{nde}}$ Pro et proposition d'épreuves pour les CM.

Épreuves

— Classes de 2nde : 2 heures pour traiter le thème et les 8 ou 9 problèmes.

— Classes de collèges et 2nde Pro : 1 heure pour traiter le thème et les 4 ou 5 problèmes.

Compétition

— Épreuve d'entraînement envoyée à tous les établissements en décembre.

— Épreuve finale, pendant la Semaine des Mathématiques, concernant uniquement les classes inscrites.

Organisateur

Régionale APMEP de Poitou-Charentes

Partenaires institutionnels

IREM de Poitiers
IA-IPR, Rectorat

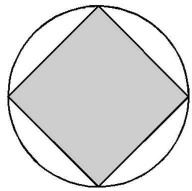
Contact

✉ APMEP
IREM de Poitiers
Bât. H3 - SP2MI Futuroscope
Bd. Marie et Pierre Curie
TSA 61 125
86073 POITIERS Cedex 9
☎ +33 (0)5 49 455 38 77 (IREM de Poitiers)
@ apmep.poitiers@free.fr

Carré encerclé (2016, niveau 5e)

Énoncé

Le rayon du cercle mesure 1 m.
Les quatre sommets du carré sont sur le cercle.
Quelle est l'aire du carré ?



Domaine

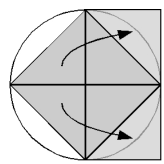
Géométrie

Niveau

À partir de la 6e.

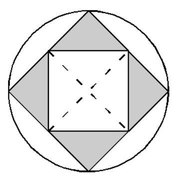
Solution

En traçant les deux diamètres d'extrémités les sommets du carré et en regroupant les morceaux gris foncé et gris clair, on s'aperçoit que l'aire du carré est équivalente à celle de deux carrés de 1 m de côté, donc à **2 m^2**.



ou bien

Le carré obtenu en joignant les milieux du carré encerclé a pour côté 1 m. Son aire de 1 m^2 est la moitié de celle du carré encerclé. Ce dernier a donc une aire de **2 m^2**.



Analyse

Dans un premier temps, on peut penser qu'il est nécessaire de calculer la longueur du côté du carré pour ensuite utiliser la formule de l'aire du carré (longueur du côté × longueur du côté).

Cet exercice a été proposé au niveau 5e car nous voulions faire fonctionner le concept d'aire, sans calcul et où le découpage s'avère astucieux. Nous voulions privilégier le découpage, solution souvent très pertinente et choisie par les élèves.

Les élèves sont ainsi incités à prendre l'initiative de tracer les deux diagonales et à obtenir quatre triangles rectangles isocèles qui, une fois assemblés judicieusement forment un rectangle de 1 m de large sur 2 m de long d'où la solution 2 m^2.

La deuxième solution non rencontrée, mais que nous avons proposée, est plus complexe d'un point de vue mathématique puisqu'elle repose sur le théorème de Varignon dans le cas particulier du carré.

Prolongement

On peut demander une solution sans découpage en utilisant le carré obtenu en joignant les milieux du carré encerclé ou encore demander un calcul numérique qui ferait intervenir l'utilisation du théorème de Pythagore.

Rugby (2016, niveau 2$^{\text{nde}}$ Pro)

Énoncé

Lors de la coupe du monde de rugby de 2015, 20 équipes se sont affrontées de la manière suivante : réparties en 4 poules de 5 équipes, chaque équipe a rencontré les 4 autres afin d'établir un classement. La suite de la compétition s'est déroulée entre les huit meilleures équipes issues des poules et a comporté trois tours à élimination directe : quarts de finale, demi-finales et finale.
Celle-ci met aux prises les vainqueurs des demi-finales, les perdants disputant la « petite finale » pour la 3$^{\text{e}}$ place de la compétition. Les quart-de-finalistes ne sont pas classés.

1. Combien de matches ont-ils été joués sur l'ensemble de la compétition ?
2. On se souvient de la victoire de la Nouvelle-Zélande contre la France en quart de finale avec un score sans appel de 62 à 13. Mais vous souvenez-vous du nombre d'essais transformés ? Pour vous aider à le retrouver, voici deux indices : la France n'a marqué qu'un seul essai, la Nouvelle-Zélande qu'une seule pénalité et son buteur a réussi plus des $\frac{3}{4}$ des transformations.

Rappel : une pénalité donne 3 points, un essai non transformé donne 5 points, un essai transformé donne 7 points.

Domaine

Arithmétique

Niveau

À partir de la 5e.

Solution

1. Nombre de matches pour 1 poule de 5 équipes :

   on les nomme A – B – C – D – E. On fait l'inventaire sans compter deux fois le même match : A rencontre B, C, D et E ; B rencontre C, D et E ; C rencontre D et E ; et D rencontre E. Il y a donc 10 matches par poule. Pour les 4 poules, cela fait 40 matches.

   On ajoute ensuite les 4 quarts de finale, les 2 demi-finales, la « petite » finale et la finale. **Soit un total de 48 matches**.

2. — Pour la France : $13 = 5$ (essai) $+ 8$. Comme il n'y a eu qu'un seul essai et que 8 n'est pas un multiple de 3 (pénalité), il a été transformé. Donc un essai transformé (7) et deux pénalités (6).

   — Pour la Nouvelle-Zélande : $62 - 3$ (pénalité) $= 59$.

   Les deux seules combinaisons possibles pour obtenir 59 avec une somme de 7 et de 5 sont :

   $2 \times 7 + 9 \times 5$ soit 2 essais transformés et 9 non transformés ;

   $7 \times 7 + 2 \times 5$ soit 7 essais transformés et 2 non transformés.

   Comme le buteur a réussi plus des $\frac{3}{4}$ des transformations, c'est la dernière solution qui convient.

   Donc **au total il y a eu 8 essais transformés** dans ce quart de finale de la coupe du monde de rugby.

Analyse

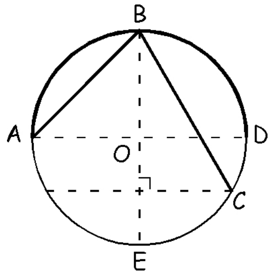
Un exercice sur un sujet d'actualité et concernant un centre d'intérêt des élèves a de grandes chances d'être lu et éventuellement résolu.

Cet exercice dans un premier temps demande de la logique pour trouver le nombre total de matches.

Ensuite la lecture du texte va amener les élèves vers la solution. Solution qu'ils connaissent s'ils ont vu le match.

Ready, steady, go ! (2016, niveau 3^{e})

Énoncé



¡ A sus puestos, listos, ya !
Dos corredores parten de A. Alix da la "media vuelta" a la pista ABD, Bob describe los segmentos [AB] y después [BC].
C pertenece a la mediatriz de [OE] y los radios [OA], [OB], [OC] y [OD] miden 50 metros.
Llegan al mismo tiempo, Alix a D, Bob a C.
¿ Cuál de los dos va más rápido ?

Ready, steady, go !
Two runners start from A. Alix runs the "half-track" "ABD", Bob runs along the segment [AB], then [BC]. C belongs to the perpendicular bisector of [OE] and the radii [OA], [OB], [OC] and [OD] are 50 meters long.
They arrive at the same time : Alix at D while Bob at C.
Which one is the faster ?

Auf die Plätze, Fertig, Los !
Zwei Läufer starten von A. Alix macht die "halbe" Runde ABD, Bob legt die Segmente [AB] dann [BC] zurück.
C gehört zur Mittelsenkrechten von [OE] und die Radien [OA], [OB], [OC] und [OD] betragen 50 m.
Sie kommen gleichzeitig an, Alix bei D, Bob bei C.
Wer von beiden läuft schneller ?

Domaine
Géométrie.

Niveau

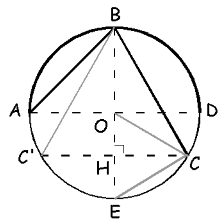
À partir de la 3e.

Solution

Traduction : À vos marques, prêts, partez !

Deux coureurs partent de A. Alix fait le « demi-tour » de piste ABD, Bob décrit les segments [AB] puis [BC]. C appartient à la médiatrice de [OE] et les rayons [OA], [OB], [OC] et [OD] mesurent 50 m.

Ils arrivent en même temps, Alix en D, Bob en C. Lequel des deux va le plus vite ?



Distance parcourue par chacun :

— Par Alix : $\frac{1}{2} \times 50 \times 2\pi = 50\pi$ soit environ 157,08 m

— Par Bob : $AB = \sqrt{50^2 + 50^2} = 50\sqrt{2}$ (propriété de Pythagore dans le triangle AOB).

Calcul de BC : (CC') est la médiatrice de [OE], donc EC = CO = OE et le triangle OCE est équilatéral. Les angles $\widehat{CEB}$ et $\widehat{CC'B}$ interceptent le même arc. Ils mesurent donc 60° et le triangle BCC' est équilatéral.

Donc $BC = \frac{2BH}{\sqrt{3}} = 50\sqrt{3}$.

Bob parcourt donc $AB + BC = 50\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$, soit environ 157,31 m.

Donc **c'est Bob qui est le plus rapide** car, à temps égal, il a parcouru la distance la plus longue (157,31 > 157,08).

Analyse

Un énoncé en trois langues (anglais, allemand et espagnol) est proposé à partir de la 4e. Ces énoncés sollicitent d'autres capacités des élèves.

Une fois traduit, l'exercice semble devenir un problème de calcul de vitesse : « lequel va le plus vite ? ». Mais si on lit l'énoncé plus attentivement, on note que les deux coureurs ont mis le même temps donc le problème devient un calcul de longueur de chemin parcouru.

Prolongement

Pour une classe de 2^{nde}, on peut proposer le texte suivant :

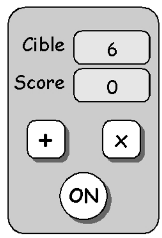
« On considère le cercle ci-contre de rayon r mètres. Deux coureurs partent de A. Alix fait le « demi-tour » de piste « ABD », Bob décrit les segments [AB] puis [BC]. C appartient à la médiatrice de [OE]. Ils arrivent en même temps, Alix en D, Bob en C. Lequel des deux va le plus vite ? ».

Ainsi la résolution met en œuvre du calcul littéral.

Le jeu électronique (2017, niveau 5e)

Énoncé

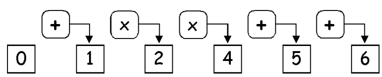
Ce petit jeu électronique est fort simple. Il s'agit d'atteindre un nombre entier, le nombre cible, donné par la machine de façon aléatoire, en utilisant un minimum de fois seulement deux boutons :



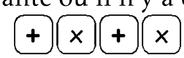
- la touche (+) augmente de 1 le score affiché à l'écran.
- la touche (×) double le score affiché à l'écran.

Quand débute la partie, le score du joueur est 0 et le nombre cible à atteindre s'affiche.

Si, par exemple, la cible est 6, le joueur peut taper successivement :



Il y a donc eu 5 pressions sur les touches. Mais il est possible de faire mieux avec la séquence suivante où il n'y a que 4 pressions des touches.



C'est la plus courte séquence possible.

Maintenant, saurez-vous atteindre le nombre cible 2017 en un nombre minimum de pressions des touches ?

Domaine

Arithmétique

Niveau

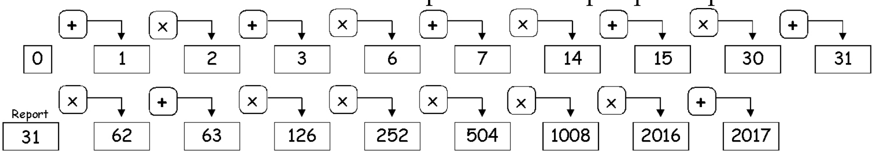
À partir de la 6e.

Solution

La stratégie est de partir de 2017 et de faire le maximum de divisions par 2 pour qu'il y ait le moins possible de pressions de touches.

2017 (-1) **2016** (÷2) **1008** (÷2) **504** (÷2) **252** (÷2) **126** (÷2) **63** (-1) **62** (÷2) **31** (-1) **30** (÷2) **15** (-1) **14** (÷2) **7** (-1) **6** (÷2) **3** (-1) **2** (÷2) **1** (-1).

Il suffit maintenant de faire les opérations réciproques à partir de 0.



Analyse

La forme ludique de cet énoncé peut être attractive et interpeller beaucoup d'élèves.

Bien sûr, on ne peut pas commencer par la touche « multiplication ». Une fois le 1 obtenu, on se rend vite compte en arrivant à 1024 que la stratégie de multiplier toujours par 2 est mauvaise. Mais cette tentative peut permettre de penser à la bonne stratégie qui consiste à considérer le problème réciproque : comment en partant de 2017 obtenir 0 et c'est là tout l'intérêt du problème. La plupart des réponses ont été obtenues par des essais.

Démontrer que la solution obtenue est la plus courte n'entrait pas dans l'objectif de cet exercice mais trouver moins de pressions de touche que son camarade peut devenir un enjeu amusant.

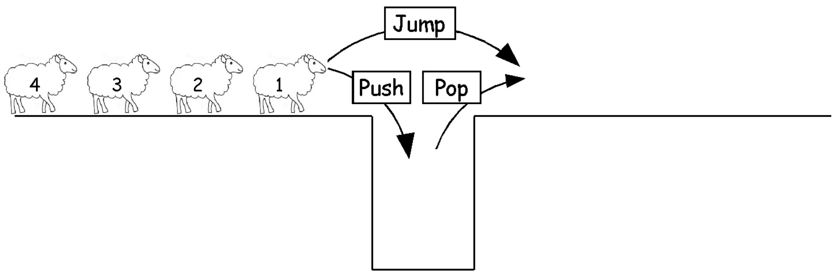
Prolongement

Écrire le calcul en une seule ligne peut faire travailler les priorités opératoires.

Saute-mouton (2017, niveau 6^{e})

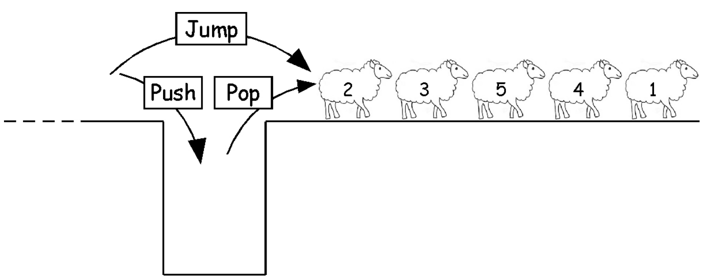
Énoncé

Au fur et à mesure que les moutons arrivent, un mécanisme permet soit de les faire passer de l'autre côté (Jump), soit de les faire descendre en les mettant les uns au dessus des autres (Push) et de les faire remonter en prenant celui de dessus et en les faisant passer de l'autre côté (Pop). Une fois passés, les moutons avancent pour laisser la place aux suivants.



1. Quel va être l'ordre des moutons de l'autre côté si le mécanisme a effectué successivement les opérations suivantes :
   Push - Jump - Push - Jump - Pop - Pop ?

2. Quelle est la plus petite suite d'opérations que le mécanisme a effectuée pour avoir obtenu l'ordre suivant ?



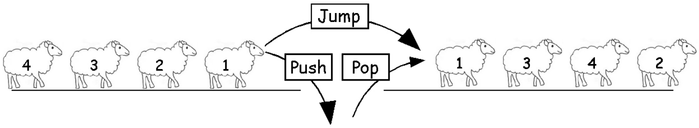
Domaine

Logique

Niveau

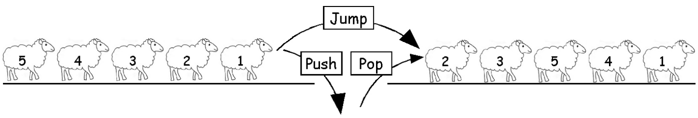
À partir du cycle 2.

Solution



1\.

Push - Jump - Push - Jump - Popp - Pop
(1) (2) (3) (4) (3) (1)



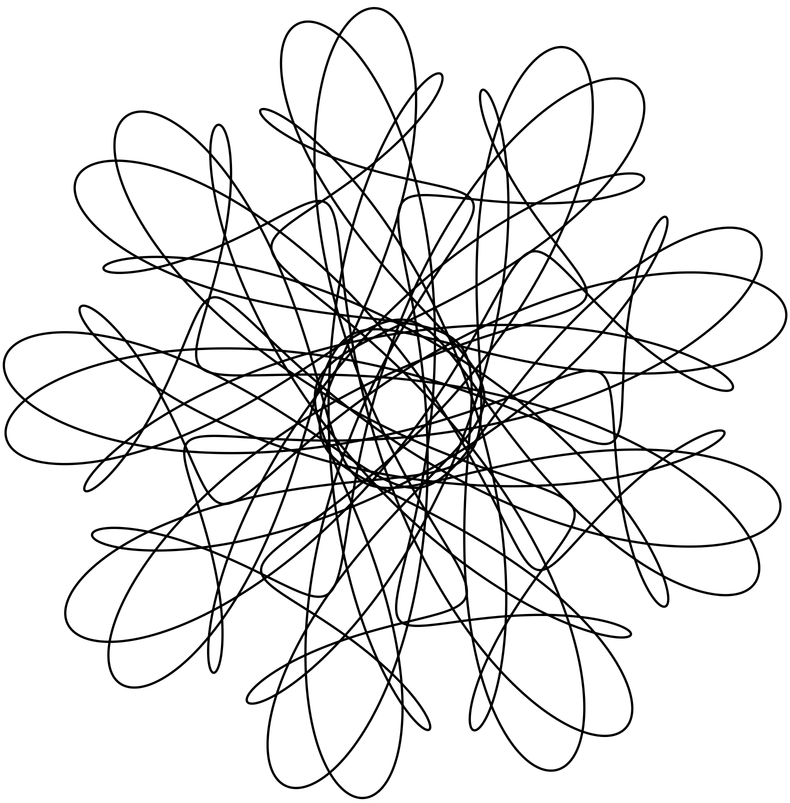
2\.

Jump - Push - Push - Jump - Jump - Popp - Pop
(1) (2) (3) (4) (5) (3) (2)

Analyse

Dans chaque épreuve de Rallye, nous essayons de proposer un exercice mettant en œuvre les capacités à comprendre un texte, à organiser une démarche et à écrire les résultats.

Ici, l'énoncé est simple mais sa résolution demande de la méthode et de l'organisation.



$$\begin{cases} x(t) &= -34\cos(43t+81) - 70\cos(16t) - 73\cos(-20t-132) \\ y(t) &= -34\sin(43t+81) - 70\sin(16t) - 73\sin(-20t-132) \end{cases}$$