Olympiades de mathématiques

Présentation

Différentes compétitions portent le nom d' « Olympiades de Mathématiques » : nous les regroupons ici dans un seul et même chapitre.

Organisée par le Ministère de l'Éducation Nationale, l'**Olympiade Nationale de Mathématiques** (initialement « Olympiade Académique de Mathématiques ») attire chaque année plus de 21 000 candidats de toutes les sections de première (dont 2 000 de lycées français à l'étranger). En outre, certaines Académies (en 2018 : Amiens, Besançon, Caen, Corse, Grenoble, Lyon, Nancy-Metz, Orléans-Tours, Reims, Rouen, Versailles) organisent des Olympiades de Quatrième (concours René Merckhoffer), et l'Académie de Versailles, des Olympiades de Troisième et Seconde. Tous les établissements reçoivent une invitation officielle à participer à ces compétitions, et l'APMEP publie chaque année (sur son site) les annales de l'Olympiade Nationale de Première.

Par ailleurs, plusieurs compétitions internationales portent le nom d'« Olympiades », notamment la plus ancienne d'entre elles, l'**Olympiade Internationale de Mathématiques (IMO ou OIM pour les francophones)** à laquelle, chaque année, plus de cent pays envoient chacun ses six meilleurs lycéens. La France participe également à l'Olympiade Balkanique Junior de Mathématiques (JBMO) pour les élèves de quinze ans et demi maximum ; l'Olympiade Européenne de Mathématiques pour Filles (EGMO), réservée aux filles (qui sont trop peu nombreuses dans les autres Olympiades : seulement 10% à l'IMO) ; le Master Roumain de Mathématiques (RMM) ; le Championnat Méditerranéen des Jeunes Mathématiciens (MYMC), épreuve par équipes mixtes, assez différente des Olympiades ; et parfois l'Olympiade Balkanique de Mathématiques (BMO), l'Olympiade de Mathématiques du Bénélux (BxMO)...

Toutes ces compétitions internationales ont en commun que les différentes équipes de France sont entraînées et sélectionnées dans le cadre de la **Préparation Olympique Française de Mathématiques (POFM)**, organisée par l'association **Animath**. Début juin, la Coupe Animath de Printemps qui, en 2018, a attiré 781 candidats (de première à quatrième), permet de sélectionner 80 participants pour un stage de dix jours fin août. Un second stage, de cinq jours, est organisé fin octobre pour une quarantaine de collégiens. La Coupe Animath d'Automne (début octobre) permet de recruter plus de cent participants à la préparation par correspondance, consistant en cinq envois (chaque mois, une série d'exercices à résoudre), cinq tests en temps limité et, pour une quarantaine d'élèves sélectionnés, un stage de six jours en février. Parmi eux, une trentaine seront qualifiés pour l'une ou l'autre des compétitions internationales. Il est bien sûr possible de suivre la préparation olympique pendant plusieurs années, et même d'être plusieurs fois candidat aux Olympiades Internationales (jusqu'au baccalauréat).

Historique

— 1959 : première Olympiade Internationale de Mathématiques (IMO) en Roumanie, entre sept pays balkaniques.

— 1967 : première participation française à l'IMO.

— 1983 : l'IMO a lieu en France (au lycée Louis le Grand à Paris).

— 1998 : création d'Animath qui, entre autres choses, « veille à l'essor des compétitions mathématiques ». Premier stage olympique Animath (dans le cadre de l'Université d'Été de la FFJM).

— 2001 : première Olympiade Académique de Mathématiques, permettant notamment de repérer des candidats potentiels à l'IMO.

— 2005 : l'Olympiade Académique est désormais ouverte à tous les élèves de première.

— 2006 : première Olympiade de Quatrième, dans l'Académie de Versailles.

— 2008 : la France étend sa participation aux compétitions internationales :

2008 – BMO (créée en 1984),

2013 – JBMO (créée en 1997) et EGMO (créée en 2012),

2015 – RMM (créé en 2008), BxMO (créée en 2009) et MYMC (créé en 2013).

— 2011 : l'Olympiade Académique accepte les Établissements Français à l'Étranger.

— 2014 : création de l'Olympiade de Troisième et Seconde par équipes, dans l'Académie de Versailles.

Compétition

► **Nombre de participants**

— Olympiade Nationale de Première : plus de 21 000.

— Olympiade de Quatrième - concours René Merckhoffer : plus de 7 000.

— Olympiade de Troisième - Seconde : plus de 1 300.

— Coupe Animath : 781 au printemps 2018.

— Olympiades Internationales : généralement 6 par pays et par compétition, sélectionnés (en France, par la POFM suite à la coupe Animath). En tout, 36 Français qualifiés en 2018.

► **Niveaux d'études**

— Olympiade Nationale : toutes sections de Première.

— Olympiades de Quatrième, Troisième et Seconde : comme leurs noms l'indiquent.

— Coupe Animath et POFM : quatrième à terminale. Les Olympiades Internationales sont en principe ouvertes à tous les lycéens et collégiens, jusqu'au baccalauréat. Dans d'autres pays, certains sont candidats à l'IMO jusqu'à six années de suite. En France, la plupart des qualifiés pour l'IMO sont en terminale, mais la JBMO accueille des collégiens.

► **Type d'épreuves proposées**

— Olympiade Nationale de Première (mi-mars) : depuis 2016, deux épreuves distinctes et consécutives, de deux heures (et deux problèmes) chacune, dont la seconde, académique, peut être résolue par équipe (obligatoirement mixtes depuis 2018 si les candidats proviennent d'un établissement mixte).

— Olympiades de Quatrième – concours René Merckhoffer (fin mars) : individuelle (ou par équipes de trois élèves à Amiens), quatre exercices indépendants en deux heures.

— Olympiades de Troisième et Seconde (même date, fin mars) : par équipes de trois élèves, pouvant être de deux niveaux distincts. Trois ou quatre exercices en deux heures.

— **Coupe Animath**
Éliminatoires en ligne (12 questions dont les réponses sont des nombres entiers : il faut 7 réponses justes sans justification). Les lauréats de certaines compétitions sont dispensés d'éliminatoires.
Épreuve de trois heures pour collégiens, quatre heures pour lycéens, début juin (coupe de printemps) et début octobre (coupe d'automne), de cinq exercices indépendants notés chacun sur 7 points. Un sujet pour collégiens, un pour lycéens (deux exercices communs).

— **Olympiade Internationale de Mathématique**
Deux épreuves de 4 heures et demie chacune (deux matins consécutifs, mi-juillet), comprenant chacune trois problèmes (un accessible, un difficile et un très difficile), notés chacun sur 7.
Les autres olympiades sont similaires : RMM en février, EGMO en avril, BMO et BxMO fin avril – début mai, JBMO fin juin. Une seule épreuve de 4 heures et demi (4 problèmes) aux JBMO, BMO et BxMO, problèmes notés chacun sur 10 aux JBMO et BMO. Le championnat MYMC (en juillet, par équipes mixtes) est très différent.

Partenaires

Ministère de l'Education Nationale, Animath, ainsi que de nombreux sponsors (Inria, Texas Instruments, Hewlett Packard, Crédit Mutuel Enseignant, École Polytechnique, Casio, Google, CNRS, Fondation Blaise Pascal, Fondation Société Générale, Cassini, Dunod, Vuibert, Pour la Science, Belin, Tangente, Kangourou, Wolfram, etc.)

Renseignements et Contacts

— Olympiade Nationale (première) :
eduscol.education.fr/cid46901/olympiades-academiques-de-mathematiques.html
www.apmep.fr/-Olympiades-A-partir-de-2010-

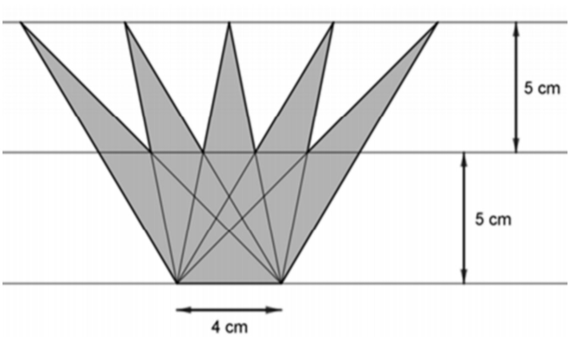
— Préparation olympique (POFM) : maths-olympiques.fr

— Animath : www.animath.fr

— @ olymp@animath.fr

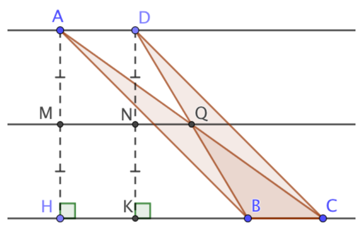
La couronne (2018, Olympiade 4e)

Énoncé



Les sommets du polygone grisé représenté ci-contre sont situés sur des droites parallèles espacées de 5 cm. La « base » a pour longueur 4 cm. Quelle est l'aire de ce polygone ?

Solution



La propriété de la droite des milieux appliquée aux triangles AHC et DKB prouve que [AC] et [BD] ont même milieu Q, donc que ABCD est un parallélogramme et que AD = BC = 4 cm. De la même manière, on met en évidence trois autres parallélogrammes de côté BC. La « couronne » peut donc se voir comme un trapèze de bases (4×4) cm et 4 cm, et de hauteur 10 cm, donc d'aire : $\frac{1}{2}(16+4)\times 10 = 100\ \text{cm}^2$, dont on a retranché quatre triangles de même aire que ADQ, soit $\frac{1}{2}(4\times 5) = 10\ \text{cm}^2$. Donc l'aire de la couronne vaut : $100-(4\times 10) = 60\ \text{cm}^2$.

Remarque

Cette solution suppose connue la propriété de la droite des milieux des côtés d'un triangle. Le théorème de Thalès fournirait une autre solution plus rapide, mais il n'est pas au programme de quatrième.

Suites de chiffres (2018, Olympiade 3^{e} - 2nde)

Énoncé

Le protocole suivant permet de définir des suites de chiffres :

— Donner les quatre premiers chiffres de la suite, par exemple 1 – 2 – 3 – 4.

— Chaque terme nouveau est le chiffre des unités de la somme des quatre précédents.

Par exemple, en partant de 1 – 2 – 3 – 4, les chiffres qui suivent sont : 0 – 9 – 6 – 9 – 4 – 8 – 7 – etc.

1. Quel est le vingtième chiffre de la suite dont les premiers termes sont 1 – 7 – 8 – 9 ?
2. Quels sont les chiffres de la suite dont les premiers termes sont 5 – 5 – 5 – 5 ?
3. La suite commençant par 2 - 0 - 1 - 8 fait-elle apparaître la succession 2 - 0 - 1 - 7 ?
4. La suite commençant par 2 - 0 - 1 - 8 fait-elle apparaître une deuxième fois 2 - 0 - 1 - 8 ?

Solution

1. La suite débutant par 1 – 7 – 8 – 9 se poursuit ainsi : 5 – 9 – 1 – 4 – 9 – 3 – 7 – 3 – 2 – 5 – 7 – 7 – 1 – 0 – 5 – 3. Le vingtième chiffre est donc 3.
2. La suite débutant par 5 – 5 – 5 – 5 se poursuit ainsi : 0 – 5 – 5 – 5 – 5 – 0 - etc. Le motif (5 – 5 – 5 – 5 – 0) se répétera indéfiniment.
3. On observe les parités des termes de la suite commençant par 2 - 0 - 1 - 8 : pair, pair, impair, pair. Le cinquième terme, 1, est impair et les suivants reproduisent le schéma « pair, pair, impair, pair, impair » à l'infini. En effet, si e a même parité que $a+b+c+d$, alors $b+c+d+e$ a même parité que a, donc le $n+5$-ème terme de la suite a toujours même parité que le n-ième. Notamment la suite commençant par 2 - 0 - 1 - 8 ne contiendra jamais deux chiffres impairs consécutifs : elle ne contiendra donc jamais la séquence 2 - 0 - 1 - 7.
4. Chaque séquence de quatre chiffres a un successeur unique, mais également un prédécesseur unique. En effet, pour b, c, d, e donnés, il existe un et un seul chiffre a tel que $a+b+c+d$ ait pour chiffre des uni-

tés e : a est le chiffre des unités de $e+(10-d)+(10-c)+(10-b)$. Or il n'y a que 10 000 séquences de quatre chiffres possibles, donc en réitérant le protocole plus de 10 000 fois, nécessairement une même séquence de quatre chiffres apparaîtra plus d'une fois : cela résulte du « principe des tiroirs ». Si l'on appelle « redite » la première des séquences qui apparaît plus d'une fois, celle-ci a un prédécesseur (qui l'a fait apparaître pour la première fois) et un « autre » qui la fait apparaître pour la deuxième fois : c'est impossible, puisque toute séquence de quatre chiffres n'a qu'un seul prédécesseur. On doit donc décaler : c'est ce prédécesseur qui est la « redite »... et ainsi de suite. Finalement, c'est la première séquence, 2018, qui est répétée (cela s'appelle parfois le théorème de la poêle à frire).

Commentaire

Cet exercice fait découvrir aux candidats des stratégies olympiques classiques, mais absentes des programmes scolaires. Le raisonnement de la dernière question revient à interpréter le protocole comme une permutation des séquences de quatre chiffres : $(1,7,8,9) \to (7,8,9,5) \to (8,9,5,9) \to (9,5,9,1) \to \cdots$ car la transformation associant à une séquence la suivante est injective. Or toute permutation des éléments d'un ensemble se décompose en cycles : chacune des 10 000 séquences appartient donc à un cycle. Le cycle $(5,5,5,5) \to (5,5,5,0) \to (5,5,0,5) \to (5,0,5,5) \to (0,5,5,5)$ est de longueur 5, ce qui répond à la deuxième question. $(2,0,1,8)$ appartient lui aussi à un cycle, ce qui répond à la quatrième, et $(2,0,1,7)$ appartient à un autre cycle. En effet, modulo 2, les $2^4 = 16$ séquences se répartissent en quatre cycles, dont trois de longueur 5 :

$(0,0,0,0)$,

$(0,0,0,1) \to (0,0,1,1) \to (0,1,1,0) \to (1,1,0,0) \to (1,0,0,0)$,

$(0,0,1,0) \to (0,1,0,1) \to (1,0,1,0) \to (0,1,0,0) \to (1,0,0,1)$,

$(1,0,1,1) \to (0,1,1,1) \to (1,1,1,1) \to (1,1,1,0) \to (1,1,0,1)$.

$(2,0,1,7) \equiv (0,0,1,1) \pmod 2$ appartient au second de ces cycles modulo 2, et $(2,0,1,8) \equiv (0,0,1,0) \pmod 2$ au troisième, donc ils appartiennent à deux cycles distincts, également modulo 10. Modulo 5, les $5^4 = 625$ séquences possibles se répartissent en trois cycles, le cycle trivial $(0,0,0,0)$ de longueur 1, et deux cycles de longueur 312 chacun : celui contenant $(0,0,0,1)$ et un autre, qui contient par exemple $(1,1,1,1)$. À l'aide d'un ordinateur, on remarque que si l'on appelle a_n le n-ième chiffre de la suite, quelle que soit la suite et quel que soit n, a_{n+78} est congru à $3a_n$ modulo 5 : il suffit de le vérifier pour un seul élément de chacun des cycles modulo 5. Ainsi, modulo 5, le 78-ième successeur de $(2,0,1,3)$ est $(1,0,3,4)$, et modulo 2, le 78-ième successeur, égal au 3-ième successeur, de (0, 0, 1, 0), est (0, 1, 0, 0). Donc modulo 10, le 78-ième successeur de (2, 0, 1, 8) est (6, 5, 8, 4). Dès lors, la longueur d'un cycle modulo 10 est le PPCM de sa longueur modulo 2 et de sa longueur modulo 5 : ainsi, six cycles sont de longueur 1560 – notamment celui auquel appartient (2, 0, 1, 8) et celui auquel appartient (2, 0, 1, 7) – trois cycles ont pour longueur 5 – notamment celui auquel appartient (5, 5, 5, 5) – deux cycles ont pour longueur 312 – tous leurs chiffres sont pairs – et le cycle trivial (0, 0, 0, 0) a pour longueur 1.

Double condition

(2018, coupe Animath de printemps - exercice commun : 4e à 1re)

Énoncé

Trouver tous les nombres réels a tels que : $a+\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{a}-\frac{3}{4}$ soient des entiers.

Solution 1

Si l'on appelle m l'entier $a+\frac{2}{3}$ et n l'entier $\frac{1}{a}-\frac{3}{4}$, $3a = 3m-2$ et $\frac{4}{a} = 4n+3$, donc $(3m-2)(4n+3) = 12$. Or $4n+3$ est impair : les seuls diviseurs impairs de 12 étant $-3, -1, 1, 3$, on doit avoir :

— soit $4n+3 = -3$, équation dont la solution n'est pas un entier ;

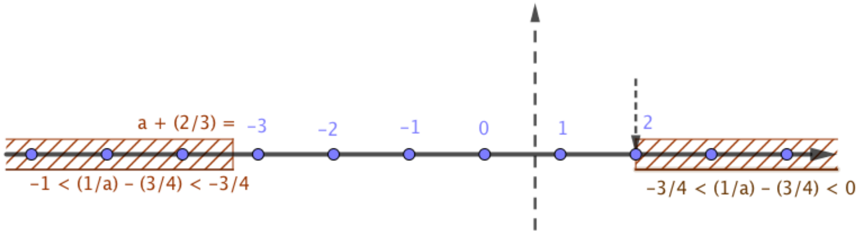
— soit $4n+3 = -1$, équation qui admet pour solution $n = -1$, mais cela entraîne $3m-2 = -12$, équation dont la solution n'est pas un entier ;

— soit $4n+3 = 1$, équation dont la solution n'est pas un entier ;

— soit $4n+3 = 3$, équation qui admet pour solution $n = 0$, ce qui entraîne $3m-2 = 4$, donc $m = 2$. Comme $a = m-\frac{2}{3}$, l'unique solution du problème est : $a = \frac{4}{3}$.

Solution 2

a doit être « suffisamment petit » ($-4 \leq a \leq \frac{4}{3}$) pour que $\frac{1}{a}-\frac{3}{4}$ soit entier, car pour $a > \frac{4}{3}$, $0 < \frac{1}{a} < \frac{3}{4}$, donc $-\frac{3}{4} < \frac{1}{a} - \frac{3}{4} < 0$, et pour $a < -4$, $-\frac{1}{4} < \frac{1}{a} < 0$ donc $-1 < \frac{1}{a} - \frac{3}{4} < -\frac{3}{4} < 0$, or il n'existe pas d'entier strictement compris entre -1 et 0.



Par ailleurs, pour $-4 \leq a \leq \frac{4}{3}$, $-\frac{10}{3} \leq a+\frac{2}{3} \leq 2$, donc $a+\frac{2}{3}$ ne peut prendre que six valeurs entières : -3, -2, -1, 0, 1, 2. Les seules solutions possibles sont donc : $-\frac{11}{3}$, $-\frac{8}{3}$, $-\frac{5}{3}$, $-\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{4}{3}$. Comme $\left(-\frac{3}{11}-\frac{3}{4}\right)$, $\left(-\frac{3}{8}-\frac{3}{4}\right)$, $\left(-\frac{3}{5}-\frac{3}{4}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right)$ et $\left(3-\frac{3}{4}\right)$ ne sont pas des entiers, la seule de ces valeurs qui convient (pour laquelle $\frac{1}{a}-\frac{3}{4}$ est lui aussi un entier) est $a=\frac{4}{3}$.

Stratégie équestre (2018, Olympiade Internationale)

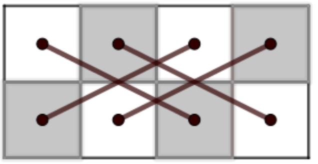
Énoncé

Un site est un point $(x; y)$ du plan tel que x et y soient des entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à 20. Initialement, chacun des 400 sites est inoccupé. Alice et Bernard placent chacun leur tour des pierres, en commençant par Alice. À son tour, Alice place une nouvelle pierre rouge sur un site inoccupé de sorte que la distance entre deux sites occupés par des pierres rouges soit différente de $\sqrt{5}$. À son tour, Bernard place une nouvelle pierre bleue sur un site inoccupé. (Un site occupé par une pierre bleue peut se trouver à une distance quelconque d'un site occupé.) Ils s'arrêtent dès qu'un joueur ne peut plus placer de pierre.
Déterminer le plus grand nombre K tel qu'Alice puisse s'assurer de placer au moins K pierres rouges, quelle que soit la manière de laquelle Bernard place ses pierres bleues.

Remarque préliminaire

Dans l'énoncé initial, Alice et Bernard (en anglais : Horst et Queenie) plaçaient non pas des pierres, mais des chevaux et des reines sur un échiquier. Au moment de finaliser l'épreuve, le jury international a formulé différemment l'énoncé : notamment l'alternance de cases blanches et noires qui caractérise un échiquier n'y figure plus explicitement, mais les candidats entraînés savent qu'un tel coloriage est souvent nécessaire pour résoudre ce genre de problème. Au lieu de cases de l'échiquier menacées par un cheval, on parle de sites distants de $\sqrt{5}$, mais cela revient au même. L'important est de bien distinguer : la détermination du nombre K, la preuve qu'Alice peut effectivement placer au moins K pierres rouges quelle que soit la stratégie de Bernard, et la preuve que Bernard dispose d'au moins une stratégie pour empêcher Alice de placer plus de K pierres rouges, quelle que soit la manière de jouer d'Alice.

Le problème ressemble à celui, plus classique : combien peut-on placer de chevaux sur un échiquier (de 64 cases) mutuellement imprenables ? 32 : il suffit d'en placer un sur chaque case noire, car un cheval placé sur une case noire ne menace que des cases blanches.



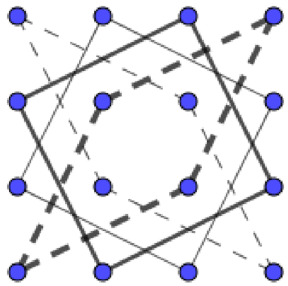
Et pour prouver qu'on ne peut pas en placer 33, on divise l'échiquier en rectangles de 8 cases : un tel rectangle contient quatre paires de cases qui se menacent mutuellement. Si l'on place 33 chevaux sur un échiquier, l'un de ces 8 rectangles de 8 cases contiendra au moins 5 chevaux (principe des tiroirs), et l'une des quatre paires de cases de ce rectangle contiendra au moins deux chevaux, qui seront donc mutuellement prenables.

Le raisonnement est ici similaire, mais la formalisation est un peu moins simple et l'échiquier est plus grand.

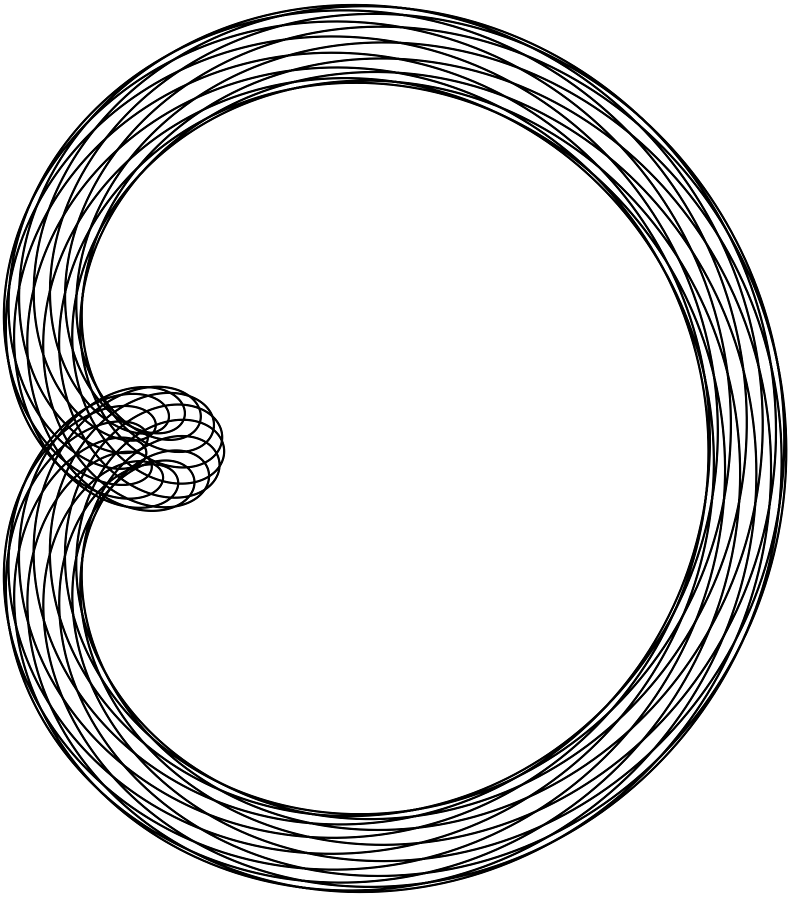
Solution

La réponse est $K = 100$. En effet, tant qu'Alice ne joue que sur des cases noires, que l'on appellera plutôt des sites pairs, c'est-à-dire des sites tels que $x + y$ soit pair, elle pourra toujours continuer à jouer, car la distance de deux sites pairs ne peut pas être $\sqrt{5}$. Si $x + y$ et $x' + y'$ sont tous deux pairs, $(x - x')^2 + (y - y')^2$ est lui aussi pair, donc différent de 5. Or il existe 200 sites pairs, et même si Bernard décide de jouer lui aussi uniquement sur des sites pairs, comme il ne joue pas plus de fois qu'Alice, il ne peut pas l'empêcher de jouer au moins 100 fois sur des sites pairs.

En revanche, il peut l'empêcher de jouer 101 fois, quelle que soit la stratégie d'Alice. En effet, notre « échiquier » de 400 sites peut être divisé en 25 ensembles de 16 sites chacun, et les 16 sites d'un tel ensemble peuvent être groupés quatre par quatre, conformément à la figure suivante :



deux « carrés » (en traits pleins) et deux « losanges » (en pointillé), ayant chacun tous leurs côtés de longueur $\sqrt{5}$. Chaque fois qu'Alice pose une pierre en un sommet d'un tel carré ou losange, Bernard choisit de poser une pierre au sommet opposé du même carré ou losange. Les deux sommets restants étant distants de $\sqrt{5}$ de celui où Alice a placé sa pierre, Alice ne pourra plus y poser de pierre : elle ne pourra donc poser qu'une seule pierre par carré ou losange, et comme notre échiquier compte en tout cent carrés ou losanges, elle ne pourra pas placer plus de cent pierres.



$$\begin{cases} x(t) & = & -11\cos(-8t+142)-79\cos(-15t-45)+52\cos(-30t-90) \\ y(t) & = & -11\sin(-8t+142)-79\sin(-15t-45)+52\sin(-30t-90) \end{cases}$$