L'Olympiade Mathématique Belge

Présentation

Historique et présentation

L'Olympiade Mathématique Belge (OMB) est née en 1976 et est organisée annuellement par la Société Belge des Professeurs de Mathématiques d'expression française (SBPMef). Depuis 2004, elle compte entre 25 000 et 28 000 participants provenant d'environ 350 écoles de l'enseignement secondaire belge francophone et luxembourgeois. En 2017, pour sa quarantième édition, la barre des 750 000 participations a été franchie. Au regard d'une population de cinq millions d'habitants, il ne fait aucun doute que l'OMB rencontre un très grand succès.

Depuis 1996, trois catégories de participants existent : la catégorie miNi pour le premier degré de l'enseignement secondaire (12-14 ans), la catégorie miDi pour le second degré (14-16 ans) et la catégorie maXi pour le troisième degré (16-18 ans).

L'organisation de la compétition nécessite un énorme bénévolat. On estime à plus d'un millier le nombre de professeurs de mathématiques participant à la surveillance et à la correction de l'épreuve. Cette épreuve a lieu le mercredi après-midi, demi-jour de congé dans l'enseignement belge.

La première partie, les éliminatoires, se déroulent le second mercredi de janvier suivant les congés de Noël et Nouvel An. Elles se déroulent dans les écoles des participants et sont corrigées par les professeurs de ces écoles. Elles sont constituées de 30 questions parmi lesquelles 22 sont à choix multiples (une bonne réponse parmi cinq) et 8 possèdent pour réponse un entier compris entre 0 et 999.

Dans chacune des dix zones géographiques où la compétition a lieu, 12% des participants environ ont accès à la demi-finale. Celle-ci est organisée par les secrétaires régionaux dans dix universités ou écoles de ces régions au mois de février ou mars, selon les dates du congé de Carnaval. Les questionnaires sont constitués de 30 questions parmi lesquelles 15 sont à choix multiples (une bonne réponse parmi cinq) et 15 possèdent pour réponse un entier compris entre 0 et 999. Les secrétaires régionaux envoient les résultats des participants au secrétaire national en vue de la sélection pour l'épreuve finale.

La finale a lieu peu après le congé de Pâques à l'université de Namur et regroupe entre 110 et 115 participants. Elle est surveillée et corrigée par les membres du jury national. Elle est constituée de quatre ou cinq questions ouvertes dont les réponses sont à justifier en détail.

Enfin, au mois de mai, a lieu, alternativement dans les universités de Bruxelles, Liège, Louvain-la-Neuve, Mons et Namur, la proclamation des résultats des trois catégories et la remise des prix offerts par la SBPMef ainsi que divers mécènes. Le prix Willy Vanhamme pour la réponse la plus élégante à un des problèmes de la finale y est offert. Les identités des participants francophones de l'équipe belge pour l'olympiade internationale y sont aussi annoncées.

Le jury national est constitué d'une vingtaine de membres. Ils sont enseignants, inspecteurs et conseillers pédagogiques de tous les réseaux de l'enseignement secondaire ou des Hautes Écoles ou Universités belges et luxembourgeoises. Ce jury compose les questionnaires de toutes les étapes de la compétition. Les membres du jury effectuent, chaque année, bénévolement, plusieurs dizaines d'heures de travail pour le bon déroulement de la compétition.

Motivation et coordonnées

L'OMB poursuit le triple but d'intéresser les élèves aux mathématiques par le biais d'une compétition passionnante, de mettre l'accent sur l'importance des problèmes dans la formation scolaire et de fournir aux professeurs un choix d'exercices peu routiniers.

Les exercices de l'OMB sont libres de droits à condition de mentionner qu'ils proviennent de cette compétition. Plusieurs manuels belges de mathématiques puisent d'ailleurs dans cette réserve d'exercices.

Tous les quatre ans, la SBPMef publie un recueil des questions de quatre olympiades. Le dernier (2011-2014) constitué par Pascal Dupont et Michel Sebille ainsi que le suivant à partir du mois de septembre sont disponibles auprès de la SBPMef.

Contact : SBPMef

✉ Campus de l'UMons, bâtiment 4 ; Avenue Maistriau 19 ;
7000 Mons ; Belgique
☎ +3265373304
www.sbpm.be (SBPMef)
omb.sbpm.be (OMB)

Problème 4 (finale maXi 2018)

Énoncé

Les nombres entiers de 0 à 2018 sont écrits au tableau. Un élève choisit à son gré deux d'entre eux, les efface et les remplace par un seul nombre égal à :

- leur somme s'ils sont tous deux pairs ;
- l'opposé de leur somme s'ils sont tous deux impairs ;
- le nombre impair moins le nombre pair s'ils sont de parités différentes.

L'opération est répétée jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul nombre au tableau.

a) Donner un exemple de résultat final qu'il est possible d'obtenir.

b) Combien de résultats différents peuvent être obtenus, selon l'ordre dans lequel les nombres sont pris en compte ? Quels sont ces résultats ?

Solution

Cette solution est due au participant Simon Lemal qui a reçu le prix Willy Vanhamme récompensant la solution la plus élégante de la compétition toutes catégories confondues.

Soit A un ensemble de nombres entiers. On définit la fonction

$$f(A) = \sum_{x \in A} (-1)^x x.$$

Montrons que les opérations décrites dans l'énoncé, modifiant A en A' ne modifient pas $f(A)$.

Cas 1 : y et z sont pairs et donc $A' = A \setminus \{y;z\} \cup \{y+z\}$.

$$f(A') = \sum_{x \in A \setminus \{y;z\}} (-1)^x x + (-1)^{y+z}(y+z) = \sum_{x \in A \setminus \{y;z\}} (-1)^x x + (-1)^y y + (-1)^z z = f(A)$$

Cas 2 : y et z sont impairs et donc $A' = A \setminus \{y;z\} \cup \{-y-z)\}$.

$$f(A') = \sum_{x \in A \setminus \{y;z\}} (-1)^x x + (-1)^{y+z}(-y-z) = \sum_{x \in A \setminus \{y;z\}} (-1)^x x + (-1)^y y + (-1)^z z = f(A)$$

Cas 3 : y est pair et z est impair et donc $A' = A \setminus \{y;z\} \cup \{z-y\}$.

$$f(A') = \sum_{x \in A\setminus\{y;z\}} (-1)^x x + (-1)^{z-y}(z-y) = \sum_{x \in A\setminus\{y;z\}} (-1)^x x + (-1)^y y + (-1)^z z = f(A)$$

Ainsi, si on part d'un ensemble A, à la fin, le résultat r vérifie $f(A) = (-1)^r r$. Dès lors, $f(A)$ et r sont de même parité, $r = (-1)^{f(A)} f(A)$ et le résultat est unique.
Si $A = \{0;1;2;\ldots;2018\}$,

$$f(A) = \sum_{x=0}^{2018} (-1)^x x = 1009.$$

Le seul résultat possible est donc -1009.

Analyse du problème

Tout d'abord, ce qui frappe dans cette solution, c'est qu'on résout la seconde sous-question avant la première, mais absolument pas comme cas particulier de la deuxième. La plupart des participants avaient évidemment résolu la première sous-question d'abord. Voici une manière de procéder.

En associant les couples $(0;2018), (1;2017), (2;2016), \ldots, (1008;1010)$, on obtient 505 nombres 2018, 504 nombres -2018 et un nombre 1009 auquel on n'a pas touché.
En associant des nombres pairs, quel que soit l'ordre, on les additionne. En faisant cela ici, il nous reste alors un nombre 2018 et un nombre 1009. En les combinant, on obtient alors -1009.

Alors que le jury pensait cette sous-question assez aisée pour débuter, seule une moitié des participants est parvenue à y répondre correctement. Un premier type d'erreur est une distraction. Les nombres sont en quantité impaire et il reste donc 1009 quand on les associe en paires comme cidessus. Un second consiste en une explication incomplète ; on associe des nombres 2018 et -2018 pour faire des zéros, mais on oublie de dire que ces 504 nombres égaux à zéro ne modifient pas le résultat final. Enfin certains comptages étaient simplement erronés par la méthode ou par une faute de calcul élémentaire.

Les deux correcteurs avaient le même avis sur la seconde partie ; elle était très difficile à noter. Les six résolutions complètes, à d'éventuelles fautes mineures près, étaient toutes différentes. Les autres finalistes avaient des morceaux de solutions. Les correcteurs voyaient parfaitement comment les compléter, mais comment donner une note à un morceau de solution ? Les participants ne concevaient évidemment pas comment aller plus loin sinon ils l'auraient écrit. Comment dès lors dire que tel morceau de la solution (a) vaut $\frac{6}{20}$ tandis que tel morceau de la solution (b) vaut $\frac{8}{20}$? C'était sans nul doute le cas d'une question ou un autre choix de correcteurs aurait pu donner d'autres résultats. Cela dit, c'est souvent le cas des questions vraiment intéressantes.

Pour finir, cette question est sans doute un bel exemple de problème incitant à créer un invariant. Dans les entrainements aux olympiades internationales, la notion d'invariant est souvent présentée comme permettant de résoudre plus facilement (ou moins difficilement) un problème apparemment ardu. Le jury de l'OMB était satisfait d'avoir présenté un problème rentrant parfaitement dans ces critères.

Problème 5 (finale miNi 2016)

Énoncé

Mathilde s'amuse à essayer de recouvrir (entièrement et sans chevauchement) des damiers carrés avec trois types de plaques qu'elle tire de sachets contenant chacun une grande plaque 5×5, une moyenne 3×3 et deux petites 1×1. Elle s'est imposé d'utiliser chaque fois les quatre plaques d'un sachet.

1. Est-ce possible pour un damier 18×18 ?
2. Est-ce possible pour un damier 12×12 ?
3. Est-ce possible pour un damier 2016×2016 ?
4. Est-ce possible pour un damier 24×24 ?

Solution

Solution inspirée de celles de François Cayphas, Loris Degueldre et Traian Sirbu

1. C'est possible pour un damier 18×18.

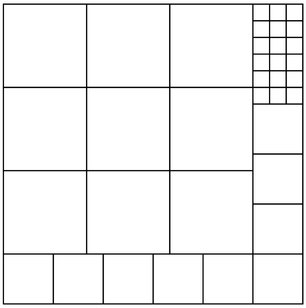
Voici un exemple de recouvrement. Le damier est complètement recouvert avec :

— 9 plaques 5×5 ;

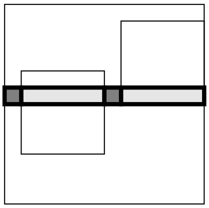
— 9 plaques 3×3 ;

— 18 plaques 1×1.

Mathilde a ouvert 9 sachets et il n'y a aucune plaque de trop.



2. Non, ce n'est pas possible pour un damier 12×12.



Combien de sachets seraient nécessaires ?

Les plaques contenues dans un sachet permettent de recouvrir une surface d'aire 36 :

$1 \cdot 5^2 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 1^2 = 36$.

Pour recouvrir un damier d'aire $12^2 = 144$, Mathilde devrait utiliser 4 sachets : $\frac{144}{36} = 4$. Elle devrait donc placer 4 grandes plaques 5×5 sur le damier.

Une ligne du damier est de longueur 12 et de largeur 1. Si celle-ci est recouverte (en partie) par deux plaques 5×5, il reste à recouvrir deux petits carrés 1×1 ($12 - 2 \cdot 5 = 2$). Mathilde ne peut recouvrir cette surface restante qu'avec deux petites plaques 1×1.

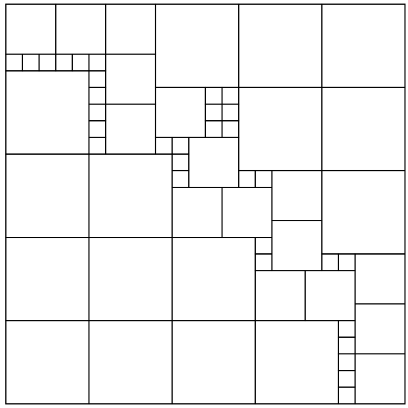
Finalement, comptons le nombre de lignes du damier où on trouverait (des parties de) deux grandes plaques 5×5. Les 4 grandes plaques à utiliser se composent chacune de 5 bandes horizontales 5×1. Sur le damier, on aurait donc au total $4 \cdot 5 = 20$ bandes 5×1, avec au maximum deux bandes 5×1 par ligne du damier de côté 12. Par conséquent, il y aurait certainement au moins $20 - 12 = 8$ lignes du damier recouvertes avec (des parties de) deux grandes plaques.

Pour chacune de ces 8 lignes, Mathilde aurait besoin de deux petites plaques 1×1. Il lui faudrait donc $8 \cdot 2 = 16$ petites plaques, or elle n'en a que $4 \cdot 2 = 8$ dans ses 4 sachets, donc c'est impossible.

3. Oui, c'est possible pour un damier 2016×2016.

   2016 est divisible par 18 ($2016 = 18 \cdot 112$). Il suffit de décomposer le damier 2016×2016 en 112^2 damiers 18×18 côte à côte. Mathilde peut recouvrir chacun des damiers 18×18 en utilisant complètement 9 sachets et en disposant les plaques de la même manière qu'au (a).

4. Oui, c'est possible pour un damier 24×24. Voici un exemple de recouvrement avec 16 sachets.



Analyse du problème

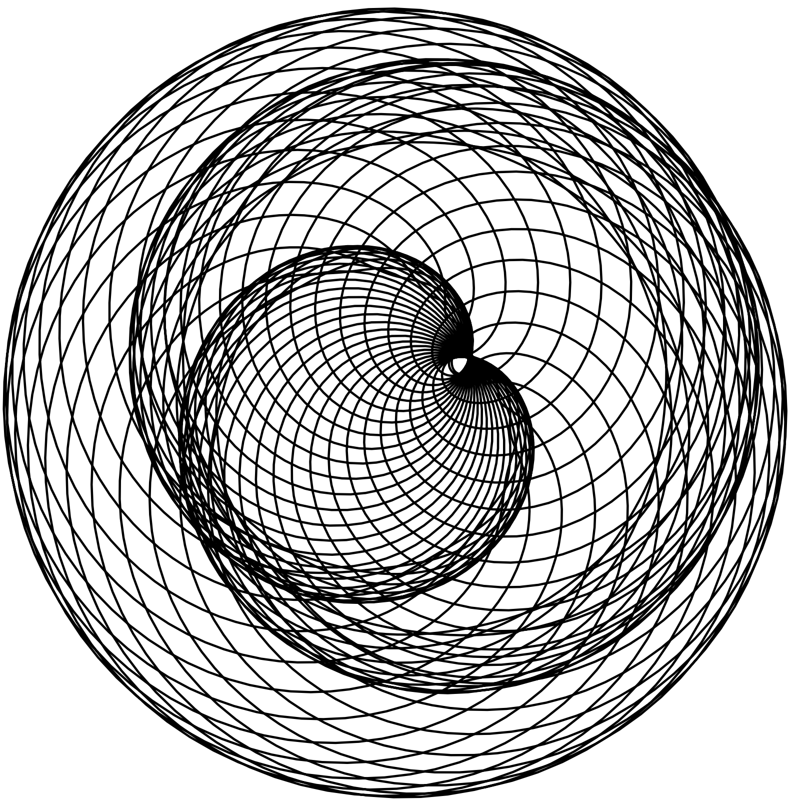
Tout mathématicien lisant cette question se demandera immédiatement pour quelles valeurs de n un damier $n \times n$ peut être recouvert de cette manière. Pour une telle catégorie d'âge, on ne peut évidemment procéder de la sorte. Le problème a donc été découpé en quatre questions demandant des raisonnements différents et qui pourraient conduire à une solution générale du problème.

La première question est assez simple pour que tout le monde puisse débuter. Il suffit de mettre les 9 grandes plaques dans un coin. Ensuite, on complète le pourtour avec les plaques moyennes et on termine avec les petites.

La deuxième question rentre dans le vif du sujet. Quatre sachets pourraient a priori couvrir un damier 12×12 puisque les plaques totalisent $12^2 = 144$ cases. Mais en réalité, ce n'est pas possible. Ceci montre que le problème général n'est donc pas uniquement arithmétique. Pour des participants de cet âge, expliquer pourquoi représente la vraie difficulté de la question. L'argument présenté n'est pas unique, mais toutes les solutions se ressemblaient.

La troisième question pousse les participants assez jeunes à abstraire leur raisonnement. Pas question évidemment de répondre par un dessin de damier 2016×2016. La solution est simple mais, sans l'abstraction nécessaire, impossible à développer pour un participant de 12 ans.

La dernière question de la finale doit être un véritable défi pour les plus doués des participants. C'est ici que le problème devient vraiment intéressant aussi pour les mathématiciens plus chevronnés. Il est conseillé ici de placer les grandes plaques dans des coins opposés pour compléter la diagonale vide par les pièces restantes. Aucune solution « régulière » n'a été trouvée par le jury. On entre vraiment dans un registre de créativité.



$$\begin{cases} x(t) &= 73\cos(37t+156)+72\cos(73t+154)+32\cos(108t-40) \\ y(t) &= 73\sin(37t+156)+72\sin(73t+154)+32\sin(108t-40) \end{cases}$$