

Maths
de la
planète
Terre
Express



Comité International des jeux mathématiques

SOMMAIRE

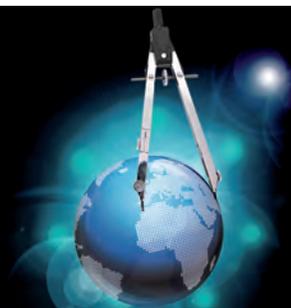


Préface	1
Mathématiques de la planète Terre	3
<i>La Terre, planète du système solaire</i>	
Astrochimie, chimie des origines ?	8
Ces Terres d'ailleurs	15
La Terre, l'homme et l'espace	22
<i>Les phénomènes naturels</i>	
Influences astronomiques sur le climat du passé	28
Prédire l'évolution des glaciers alpins par la simulation numérique	34
L'eau dans tous ses états	40
Le moulin et le papillon	48
<i>La Terre, planète de l'Homme</i>	
Sornettes sur la planète	55
Géométrie Fractale et Phénomènes Naturels	60
L'arpenteur géomètre d'hier à aujourd'hui	65
Temps et Astronomie	70
La démographie en équations	76
Décodage par IRMf des percepts visuels induits par la lecture de mots	81
Collectif <i>Un jour, une brève</i>	87
Ours	91

Le plaisir et le profit

Préface d'Étienne Ghys

Directeur de recherche au CNRS
ENS de Lyon



Les mathématiques seraient-elles un jeu ?
Notre planète un terrain de jeu ?

Au premier abord, les réponses à ces questions semblent négatives. Demandez à un chercheur en mathématiques s'il considère son métier comme un jeu. Il vous parlera bien sûr du plaisir de faire des maths et des (trop rares) moments d'excitation intense, lorsqu'il découvre, ou lorsqu'il comprend quelque chose de nouveau, mais il vous parlera probablement également de longues périodes de doute... Je ne pense pas qu'on puisse dire que la mathématique soit un jeu. Quant à notre planète, il va de soi que les problèmes qu'elle nous pose peuvent rarement être assimilés à des jeux !

Et pourtant, l'aspect ludique des mathématiques est incontestable et constitue l'une des plus belles portes d'entrée dans ce monde merveilleux. Je me souviens avec émotion d'avoir emprunté à la bibliothèque municipale, alors que j'étais adolescent, un livre écrit en 1612 ! Les *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres* par Claude-Gaspar Bachet, sieur de Méziriac¹. Un livre de jeux et de mathématiques ! Dans sa dédicace au Comte de Tournon, l'auteur écrit :

Monsieur,

Je vous offre des jeux, mais qui sont, à mon avis, dignes de votre bel esprit, et capables de lui fournir quelquefois un agréable divertissement. J'ai juste sujet de juger ainsi, puisque j'ai eu le bonheur de connaître, par expérience, les belles qualités que vous possédez et le plaisir que vous prenez aux Mathématiques, et particulièrement à cette sorte de jeux qui se font par les nombres, dont je vous en ai vu pratiquer plusieurs fort heureusement : et même vous m'avez fait l'honneur d'en vouloir apprendre de moi quelques-uns. Ces considérations ont été les motifs qui m'ont porté à vous dédier ce livre.

Je me souviens que ces devinettes, écrites dans un style *délectable*, ont contribué à me donner le goût des maths. Tout à coup, les diviseurs communs et autres concepts mathématiques que j'apprenais à l'école, et qui n'étaient pourtant pas très amusants par eux-mêmes, prenaient tout leur sens. Les énigmes de Bachet m'encourageaient à en savoir plus sur les nombres. Je suis d'ailleurs loin d'être le seul mathématicien dont l'appétit mathématique a été aiguisé par les jeux...

Bien sûr, les jeux mathématiques ne servent pas uniquement à susciter les vocations de quelques chercheurs en mathématiques ! Ils servent avant tout à s'amuser, et c'est bien suffisant... On peut bien jouer sans avoir nécessairement envie de devenir mathématicien ! Il y a tant d'autres choses passionnantes. Les maths sont fréquemment accusées d'élitisme et d'être des instruments de sélection dans notre société. D'un côté on voudrait que les mathématiques soient véritablement populaires et qu'elles soient accessibles à tous. Et d'un autre on aimerait amener ceux qui le souhaitent vers des mathématiques *sérieuses*, qui ne sont malheureusement pas toujours faciles. Comment sortir de ce dilemme ? Les jeux sont l'une des solutions possibles. Ils permettent à tous de s'amuser et d'entrevoir des concepts mathématiques, et ils encouragent ceux qui le souhaitent à aller plus loin.

Que dire de la planète Terre ? Un jeu ? Quelquefois... Je suis impressionné par l'initiative *Une brève un jour : MPT 2013*² : chaque jour, un aspect mathématique différent est abordé et publié sur internet. À vrai dire, bien peu de ces brèves traitent de problèmes *amusants* ou *délectables* et beaucoup sont *sérieuses* ... Mais sérieux ne veut pas dire ennuyeux ! On peut aborder les mathématiques de nombreuses manières : ludique ou sérieuse...

Une édition récente du livre de Bachet contient quelques vers à la gloire de son auteur :

*Tes jeux, mon cher Bachet, doctement inventés,
Savent bien accoupler d'un art inimitable
Le plaisir au profit et font qu'en même table
Chacun peut assouvir ses curiosités.*

N'est-ce pas une bonne image des mathématiques : accoupler le plaisir au profit ? Je suis sûr que lors de la quatorzième édition du Salon de la Culture et des Jeux Mathématiques, chacun pourra assouvir ses curiosités.

E.G.

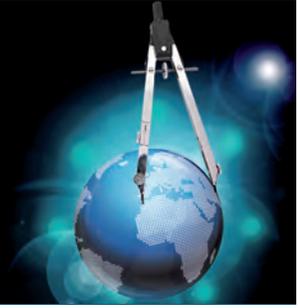
¹ On peut le lire ici <http://cnum.cnam.fr/DET/8PY45.html>

² <http://mpt2013.fr/>

Mathématiques de la planète Terre

Christiane Rousseau

Professeur titulaire
Université de Montréal



Une année entière à explorer notre planète à l'aide d'outils mathématiques et à parler de son futur, n'est-ce pas trop long ? Lorsqu'on commence à se demander de quoi on pourrait parler, on compte sur les doigts d'une main les sujets qui nous semblent pertinents. Mais, plus l'on poursuit, plus l'aventure devient fascinante, et plus nombreux sont les sujets dont on entrevoit l'intérêt et que l'on n'aura pas le temps d'approfondir.

Pour ma part, cela fait déjà 4 ans que j'ai lancé l'idée de cette année internationale et ma passion d'en apprendre plus augmente avec le temps.

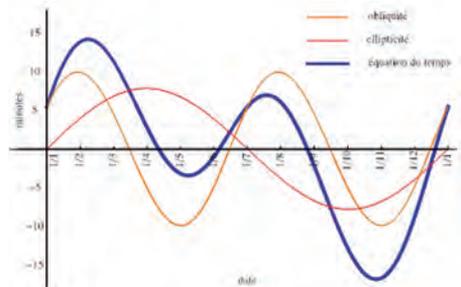
Pour expliquer le vaste spectre des sujets qui cadrent sous le thème des mathématiques de la planète Terre, on aime les regrouper en quatre grands thèmes :

- explorer notre planète, sa structure, ses océans et climats, ses mouvements planétaires ;
- notre planète est habitée par la vie ;
- notre planète est façonnée par la civilisation ;
- notre planète est menacée.

Explorer notre planète

Le premier thème me semble le plus riche en problèmes mathématiques de niveau abordable.

On peut commencer par les classiques : décrire la hauteur du soleil à midi, et la longueur du jour selon les saisons et la latitude, découvrir la différence entre le midi solaire indiqué par un cadran solaire et le midi moyen indiqué par nos horloges.



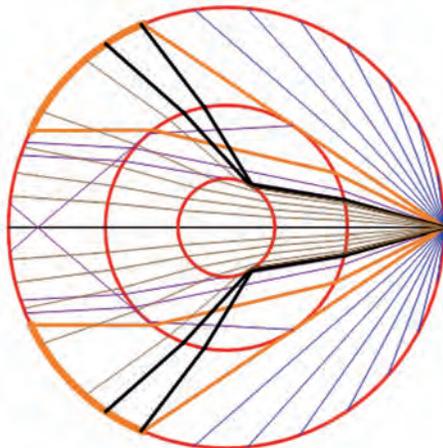
L'équation du temps est la différence entre le midi vrai et le midi moyen

cartographier la Terre, etc.



Archimède savait déjà que la projection horizontale sur le cylindre préserve les rapports d'aires

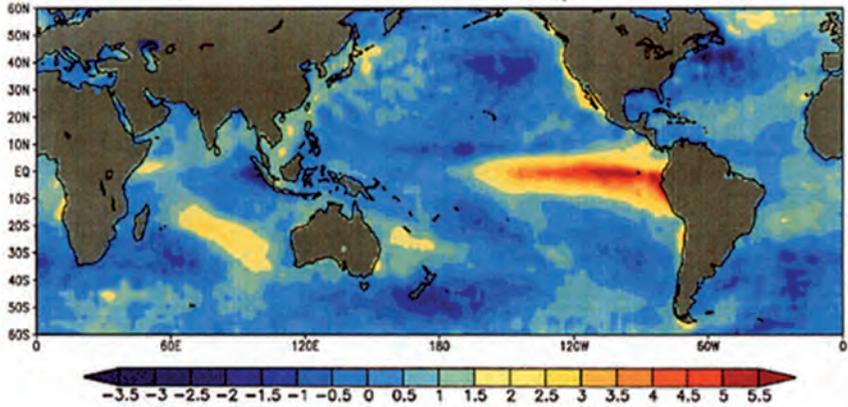
Mais on peut aller plus loin : comment peut-on explorer l'intérieur de notre planète et découvrir sa structure ? On le fait de manière indirecte en observant et analysant les signaux réfléchis et réfractés par les différentes strates géologiques. Nous mettons alors nos *lunettes mathématiques* qui nous permettent de *voir* l'intérieur de la Terre. Lorsqu'il s'agit de détecter du pétrole dans le sol, il suffit d'envoyer des signaux et d'analyser leur réflexion. Par contre, les seuls signaux suffisamment puissants pour explorer les entrailles de la Terre sont les signaux sismiques générés par les grands tremblements de terre et répertoriés par les stations sismiques de par le monde. Ainsi, la mathématicienne danoise Inge Lehmann a découvert le noyau interne de la Terre en 1936, en remarquant que des ondes sismiques étaient réfléchies sur ce noyau.



Les ondes sismiques réfractées ou réfléchies sur les diverses strates de la Terre

Beaucoup plus près de nous, Ingrid Daubechies entraîne actuellement des géophysiciens à *voir* les panaches volcaniques qui suintent au travers du manteau terrestre. Comme les plaques tectoniques bougent, cela crée des îles volcaniques isolées comme celles des archipels de Hawaïi, Tahiti, des Canaries, etc.

Ceci est loin d'épuiser le premier thème. Ainsi, la force de Coriolis due à la rotation de la Terre autour de son axe explique la circulation atmosphérique à grande échelle et pourquoi il n'y a jamais d'ouragans le long de l'équateur. On a maintenant une bonne modélisation de la propagation des tsunamis loin des côtes, et on sait que leur vitesse de propagation est inversement proportionnelle à la racine carrée de la profondeur de l'océan. Et on peut maintenant non seulement faire des prévisions météorologiques à court terme mais aussi prévoir des tendances saisonnières dues à des phénomènes comme el Niño et la Niña.

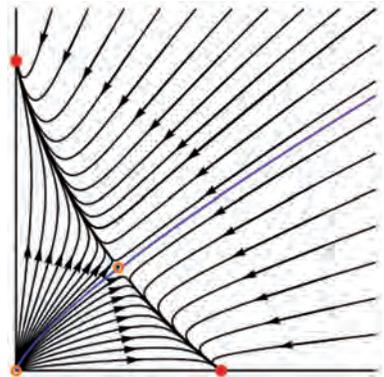


Anomalies de températures à la surface des océans (en °C) lors d'El Niño en 1997 (source NOAA)

Notre planète est habitée par la vie

Notre planète foisonne d'une multitude d'espèces et les scientifiques sont intrigués par le maintien de cette grande biodiversité. En effet, les modèles mathématiques d'espèces en compétition prévoient l'extinction d'espèces dès que la compétition pour les ressources est suffisamment forte.

C'est qu'il existe d'autres forces que la simple compétition qui assurent la biodiversité. Tout d'abord, il faut compter sur l'hétérogénéité spatiale : les modèles ou les conditions initiales ne sont pas les mêmes d'une région à l'autre. On ne peut pas non plus négliger l'hétérogénéité temporelle : une espèce pourrait être favorisée lorsqu'il fait chaud ou en période de sécheresse et une autre dans des



La compétition forte entre deux espèces : selon la condition initiale, une des espèces est éliminée.

conditions inverses. Une autre grande force qui maintient la biodiversité est la coopération. La coopération dont on parle ici est une coopération intéressée : les partenaires de la coopération seront tous les deux gagnants. De tels modèles de coopération existent dans les mondes animal et végétal. Et l'homme est devenu champion de la coopération dans son organisation de la planète. La théorie des jeux coopératifs joue un rôle de premier plan dans les modèles économiques et financiers. Dans la théorie des jeux coopératifs, on fait l'hypothèse que l'autre partenaire est intelligent et pourrait donc prévenir et déjouer une tentative d'anéantissement. Il est donc de l'intérêt de chacun des partenaires de coopérer et de rechercher une solution optimale pour les deux partenaires.

Notre planète est en danger

Les dangers qui menacent notre civilisation sont de toutes sortes. La modélisation mathématique des épidémies a permis de mieux comprendre leur propagation et de mettre au point des stratégies de contrôle efficaces. Ainsi, on sait qu'il n'est pas nécessaire de vacciner toute une population pour éradiquer une maladie. Il suffit de vacciner un pourcentage de la population de telle sorte que chaque individu contagieux contamine en moyenne moins d'un individu.

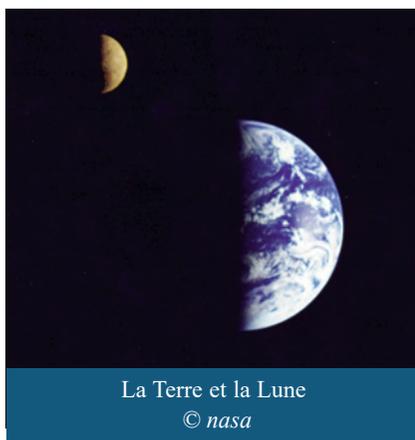
Les défis des changements climatiques et du développement durable sont par contre immenses parce que tous les problèmes sont inter-reliés. Déjà, quantifier les changements climatiques et la fourchette de hausse des températures est un défi en soi. Mais les changements climatiques risquent d'augmenter la fréquence et l'intensité des événements météorologiques extrêmes. Ils vont affecter les écosystèmes, soit directement, ou encore indirectement via de nouvelles espèces invasives. Ainsi, la coccinelle du pin des montagnes détruit les forêts de l'ouest canadien : auparavant, les hivers rigoureux maintenaient la population de cet insecte sous contrôle mais ces coccinelles prolifèrent maintenant en profitant des hivers plus doux. Les poissons des océans ne peuvent s'adapter aux températures plus chaudes. Ils migreront vers les régions plus près des pôles ou disparaîtront. La fonte des grands glaciers de l'Antarctique et du Groenland et le réchauffement des océans vont faire monter le niveau des océans et inonder des régions côtières très peuplées et des régions agricoles, en même temps que la croissance de la population mondiale va mettre une pression sans précédent sur les ressources de la planète.

Que peuvent faire les mathématiques ?

Comment alors convaincre les gouvernements d'agir, surtout en période de crise économique ? Une possibilité est de mettre un coût sur les différents scénarios et stratégies. Le rapport Stern sur l'économie du changement climatique disait déjà en 2006 que les bénéfices d'une

action rapide et musclée sur les changements climatiques sont de loin supérieurs aux coûts de l'inaction. Dans ce domaine, la modélisation des événements extrêmes, dont la probabilité est très faible mais les coûts astronomiques, est un défi important pour les mathématiciens. Et peut-on espérer migrer vers une économie plus verte qui soit en même temps synonyme de prospérité et de plein emploi ?

Vous me direz que la Terre a connu des cycles climatiques et même des périodes de glaciation. Vous avez raison et les mathématiques permettent d'expliquer ces cycles par les variations cycliques de l'orbite terrestre, appelées cycles de Milankovitch. Ainsi, les oscillations de l'obliquité de l'axe de la Terre ou encore celles de l'excentricité de l'orbite elliptique de la Terre sont corrélées avec les climats anciens de la Terre, soit parce que les régions polaires reçoivent moins de soleil, ou encore parce que la Terre passe plus de temps loin du soleil lorsque son orbite est plus allongée. Ces cycles climatiques se poursuivront-ils pour l'éternité ? Probablement pas : Jacques Laskar a montré que l'orbite de la Terre était chaotique et qu'une collision avec les autres planètes internes n'est pas exclue. Mais rassurez-vous : cela n'arrivera pas dans le prochain milliard d'années. Jacques Laskar a aussi montré que la Lune nous protège : c'est elle qui stabilise l'axe de la Terre et qui est responsable du cycle des saisons que nous connaissons.



J'espère que vous avez noté que j'ai oublié ou négligé plusieurs sujets qui se rapportent aux mathématiques de la planète. Par exemple, les réseaux de transport ou encore le graphe de la Toile. Vous l'avez compris, le sujet est aussi vaste que notre bonne vieille Terre et seule votre curiosité pourra vous amener à en découvrir les nombreuses facettes.

C.R.

Pour en savoir plus :

Vous pouvez commencer votre quête des *Mathématiques pour la planète Terre* sur les sites :

mpe2013.org/

ou

mpt2013.fr/

Astrochimie, chimie des origines ?

Louis d'Hendecourt

Institut d'Astrophysique Spatiale, Orsay



L'astrochimie à l'origine de la vie ?

Depuis de nombreuses années, des molécules sont observées dans le milieu interstellaire, particulièrement dans les régions de formation des étoiles comme le montre la Figure 1, là où se forment aussi et en même temps les planètes. Ces molécules sont dites *organiques* c'est-à-dire qu'elles sont constituées, pour l'essentiel d'assemblages d'atomes de carbone, d'oxygène, d'azote, de soufre et d'hydrogène.



© nasa

Figure 1 : Nuage moléculaire.

Ces objets sont de gigantesques nuages interstellaires où sont détectées de très nombreuses molécules, en grande majorité, organiques.

L'effondrement de ces nuages sous l'action de leur propre gravité va former les étoiles, les planètes et divers débris dont les comètes et les astéroïdes.

De fait, les molécules du *vivant*, celles qui nous constituent, sont formées des mêmes atomes et, en partie, des mêmes assemblages d'atomes. La découverte de molécules semblables à celles de la vie, par exemple les acides aminés qui composent les protéines de l'ensemble des êtres vivants, dans les météorites trouvées sur la Terre (Figure 2), suggère que la chimie extraterrestre a pu effectivement jouer un rôle important sinon déterminant pour l'origine de la vie sur notre planète.

© MHNP



Figure 2 :
La météorite dite de Paris a été récemment acquise par le Muséum d'Histoire Naturelle à Paris. Elle pèse environ 1,2 kg. C'est une météorite très carbonée et très primitive dont le contenu moléculaire organique est d'une très grande richesse.

Plus important, la détection récente et sans cesse renouvelée de très nombreuses exoplanètes (des planètes orbitant autour d'étoiles autres que notre Soleil), et l'universalité des phénomènes mis en jeu, suggère que de très nombreuses autres planètes ont pu connaître la même évolution. Ensemencées par la chimie extraterrestre, ces planètes auraient alors pu, elles aussi, démarrer sur leur sol une vie ressemblant plus ou moins à la nôtre. L'étude de l'astrochimie, une branche de l'astrophysique, y compris par l'expérimentation en laboratoire peut donc tout naturellement mener à l'étude scientifique de l'origine de la vie.

L'approche du laboratoire

Lors de la formation du Système Solaire et de ses planètes, on observe la formation de très abondantes quantités de glace, contenant des molécules simples, de l'eau, de l'alcool, de l'ammoniac et du gaz carbonique principalement qui se forment dans des régions très froides, loin du Soleil. Ces glaces sont d'ailleurs retrouvées dans les comètes qui se rapprochent de temps en temps du Soleil en s'évaporant, donnant des images spectaculaires de ce phénomène comme le montre la Figure3.

Figure 3 : Comète de Hale-Bopp.
Cette comète très brillante a été observée par le satellite européen ISO en 1996. En s'approchant du soleil, la glace piégée dans la comète s'évapore en libérant des poussières diffusant la lumière solaire et très visibles de ce fait.

Ces poussières vont devenir des micrométéorites et apporter à la surface de la Terre toute la chimie organique de la comète



Bien entendu, en s'évaporant, la glace des comètes emmène avec elle des poussières connues sous le nom de micrométéorites qui contiennent, comme les météorites, des molécules organiques en grand nombre. Ces micrométéorites sont elles aussi récupérées en laboratoire (Figure 4) pour être analysées, confortant ainsi l'hypothèse initiale, celle de la rencontre entre la chimie interstellaire, la chimie à la surface de la Terre et peut-être, l'origine de la vie.

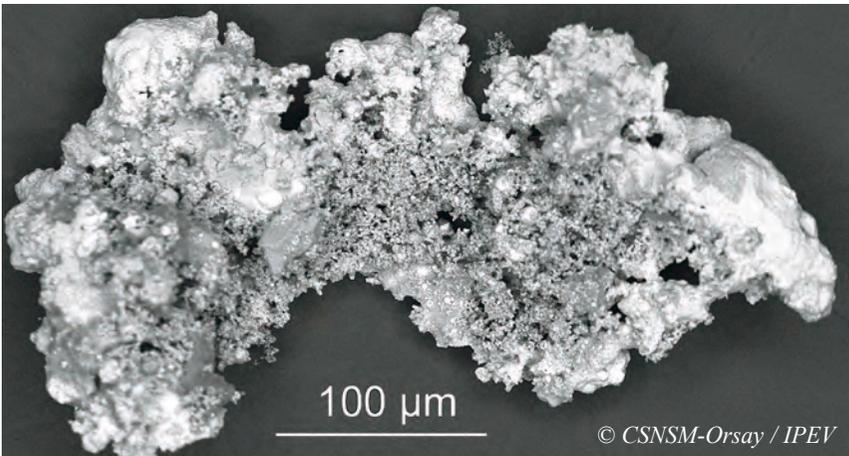


Figure 4 : Micrométéorite antarctique.

Cette micrométéorite (et beaucoup d'autres) a été récupérée par une équipe française lors d'expéditions dans l'Antarctique. Les nombreuses analyses effectuées sur ce type d'objets permettent de comprendre leur composition chimique et leur apport en eau et molécules organiques à la surface de planètes telluriques comme la Terre.

En laboratoire, le phénomène de la production de glaces peut être assez facilement reproduit. L'observation des glaces formées est comparée aux observations astronomiques qui permettent donc, par la simulation en laboratoire, de reproduire la chimie associée à ces glaces.

Cette simulation est couramment effectuée à l'Institut d'Astrophysique Spatiale à Orsay. Les molécules initialement dans le gaz, sont déposées sous forme de pellicule de glace à très basse température et irradiées, comme le montre la Figure 5 par une lampe à plasma produisant un puissant rayonnement qui ressemble à celui d'une étoile dans l'environnement naturel de la formation du système planétaire.

A la fin de l'expérience, l'échantillon est réchauffé à la température normale (celle du laboratoire). La glace s'évapore mais une partie de cette glace se retrouve transformée en matière organique qui est ensuite analysée par des techniques de chimie analytique très sensibles.

Surprise ! Les molécules alors détectées dans ces résidus organiques contiennent de très nombreux acides aminés. Ces acides aminés se retrouvent également dans les météorites et sont considérées comme des briques essentielles de la matière vivante.

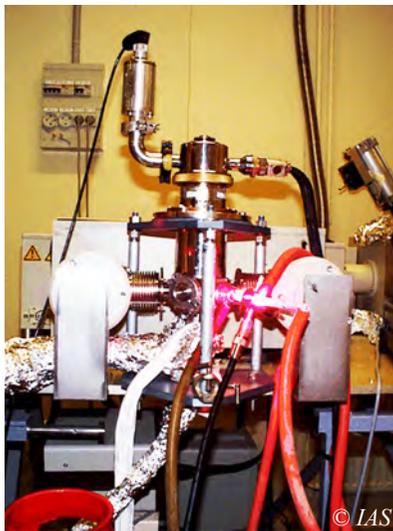


Figure 5 :

Expérience de simulation de glaces cométaires en laboratoire, à l'Institut d'Astrophysique Spatiale à Orsay. Le cryostat vertical est refroidi par un apport d'hélium liquide permettant une très basse température.

Le mélange moléculaire gazeux, choisi selon l'application astrophysique désirée, est injecté et forme un film de glace observé par spectroscopie infrarouge. La lampe à plasma bien visible, permet l'irradiation ultraviolette de l'échantillon de glace qui va ensuite évoluer vers une matière organique complexe. Celle-ci sera ensuite comparée avec la composition des météorites.

Expériences de laboratoire : peut-on aller plus loin ?

Ces expériences, permettant de reproduire des analogues de glaces interstellaires ainsi que leur évolution, sont relativement simples à mettre en place. L'analyse de la matière organique est nettement plus difficile. Le résidu organique est soluble dans l'eau ce qui est très important pour tenter de suivre l'évolution chimique de ce matériau vers des molé-

cules de plus en plus longues et complexes, des molécules qui pourraient commencer à ressembler à des protéines.

Cependant, deux problèmes majeurs se posent aux chercheurs. Tout d'abord, plus une molécule est complexe, plus elle devient difficile à analyser et donc il est pour l'instant encore impossible de vérifier l'hypothèse de départ. C'est un axe de travail majeur dans la discipline de l'astrochimie. La première chose à vérifier est de contrôler que la composition chimique du résidu organique de laboratoire est bien similaire à celle de la composition organique des météorites et des micrométéorites. Ce résultat est à la portée des chercheurs et fait l'objet d'une activité intense dans plusieurs laboratoires, tant en France qu'à l'étranger. La validation de l'hypothèse initiale présentée ci-dessus est en effet la réalité de notre travail scientifique.

Le deuxième problème est bien plus complexe à résoudre, voire même à aborder sur un plan fondamental. En effet, plus une molécule organique est grande, moins elle est stable. Dans l'eau, absolument nécessaire pour mettre en contact les *briques* du vivant afin de former un mur, on constate que les murs se détruisent à leur tour très vite pour revenir rapidement à la brique de base. Ce problème est connu depuis longtemps en thermodynamique, une branche de la physique qui étudie, entre autres, l'évolution des molécules complexes dans les systèmes encore non vivants.

Ce problème est en fait très sérieux mais il faut savoir que là aussi, les chercheurs continuent à travailler sur ce sujet en préparant des expériences en laboratoire qui vont aller bien au-delà de celles décrites dans ce court article.

La vie dans l'Univers

Si l'on s'intéresse au problème de l'origine de la vie et donc de la possibilité d'avoir de la vie sur d'autres planètes, une question aussi ancienne que la civilisation humaine, il convient cependant de bien réaliser qu'aucune autre forme de vie n'a pour l'instant été observée en dehors de notre écosphère terrestre. Sur un plan scientifique cela signifie que l'on ne peut travailler que dans le contexte de notre vie terrestre.

Notre planète Terre et surtout ses conditions initiales (température, ensoleillement, présence d'eau liquide) sont de mieux en mieux connues par l'étude des météorites qui sont tombées sur la Terre primitive il y a environ 4 milliards d'années. On peut donc, dans le cadre terrestre et en se concentrant sur la vie terrestre, sérieusement envisager une approche expérimentale et scientifique qui permette de passer de l'inanimé au vivant, même si le but est encore très loin de nos possibilités expérimentales. Par contre, il faut aussi bien comprendre que toute l'écosphère primitive de la Terre a été très fortement sensible à la précision des condi-

tions initiales qui ont déterminé ce que la Terre est devenue. La présence de vie en dehors de la Terre n'est donc, pour l'instant, aucunement garantie et n'est de plus pas directement quantifiable car trop d'inconnues sont encore présentes dans notre réflexion. Un exemple frappant de ce fait est donné par les trois planètes sœurs que sont la Terre, Vénus et Mars.

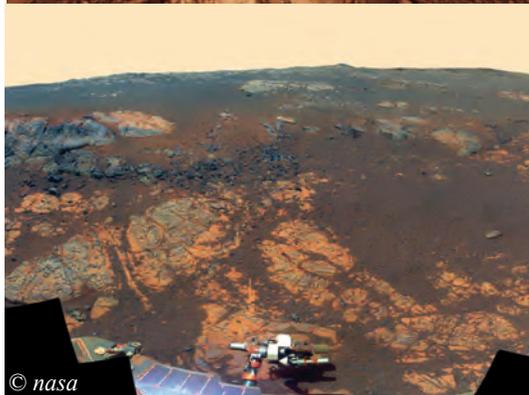


Figure 6 :
Le sol des trois planètes telluriques (solides) dans le Système Solaire.

Sur la Terre, la température moyenne est de l'ordre de 10°C et l'atmosphère dense permet de maintenir la présence d'eau liquide et des océans.



Sur Vénus, la température de surface est de l'ordre de 460°C , due à l'énorme densité de l'atmosphère composée de dioxyde de carbone entraînant un effet de serre très important, responsable de cette température.



Sur Mars, l'atmosphère, toujours du dioxyde de carbone en grande majorité est très ténue (1/100 de celle de la Terre) et ne permet pas un effet de serre suffisant pour réchauffer la planète qui est glaciale. Par ailleurs, l'eau liquide, probablement présente sous forme d'un océan au tout début de la planète a disparu assez rapidement pour des raisons mal comprises.

Ces trois planètes se sont formées en même temps, à partir des mêmes matériaux cosmiques. Seule la Terre a permis le développement de la vie comme le montrent, Figure 6, les trois célèbres photos prises à la surface de ces planètes.

Conclusion

Tout comme la cosmologie explore les premiers instants de notre Univers, l'astrochimie et la cosmochimie (la chimie des météorites) explorent l'origine de notre Système Solaire, de notre planète, avec en vue la possibilité d'apporter une explication scientifique au passage de cette chimie extraterrestre à la chimie de l'environnement de la Terre primitive. Ce but, probablement à court et moyen terme, puis dans un futur plus lointain, devrait permettre de comprendre la transition de l'inerte au vivant. La plupart des concepts sur l'origine du monde ont été formulés dans l'Antiquité sans aucune possibilité de vérification expérimentale, ni même de stricte démarche scientifique. Il faut attendre la Renaissance au XVI^e siècle, pour qu'une vraie démarche scientifique ouvre la voie à la science moderne.

Au XXI^e siècle, nous possédons maintenant des outils d'investigation, d'expérimentation et de diagnostics qui doivent permettre de nous poser sérieusement la question de nos origines et celle de la place de l'Homme dans cet Univers dont l'évolution cosmique semble avoir déterminé notre propre existence.

L.d'H.

Références pour en savoir plus :

<http://www.exobiologie.fr/>

le site de la Société Française d'Exobiologie, un site facile d'accès à tous qui fait le point sur l'ensemble de la discipline Astrobiologie/Exobiologie.

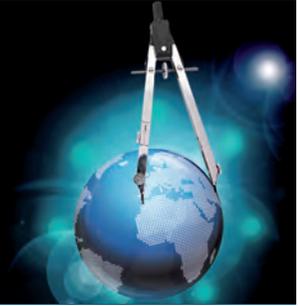
Le site est bien maintenu et quantité d'informations peuvent y être trouvées.

Livre récent de lecture plus difficile : *De l'inerte au vivant. Une enquête scientifique et philosophique*, Patrick Forterre, Louis d'Hendecourt, Christophe Malaterre, Marie-Christine Maurel, 2013, éditions « La Ville Brûle », ISBN 978-2-36012-0-30-7

Ces Terres d'ailleurs

Roger Ferlet

Directeur de recherche CNRS
Institut d'Astrophysique de Paris



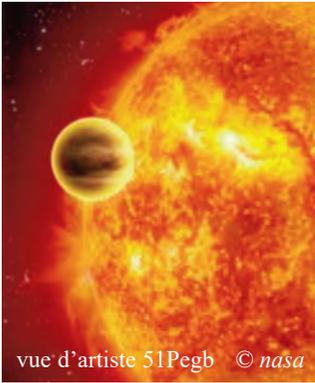
En 1995, les sciences planétaires ont fait irruption dans tous les médias : des astronomes suisses, utilisant un spectrographe à l'Observatoire de Haute Provence, annonçaient la découverte de la première planète qui tournait autour d'une autre étoile que notre Soleil. Près de quatre siècles après que Giordano Bruno ait été brûlé à Rome en partie pour avoir affirmé la pluralité des mondes, la science commençait à mettre en place les moyens de répondre à l'une des plus anciennes questions que se pose l'Humanité : sommes-nous seuls ?

Comment détecter les exoplanètes ?

A l'instar d'un lanceur de marteau qui prend son élan, dans un système étoile – planète (*l'étoile représentant le lanceur et la planète le marteau*), ce sont en fait les deux astres qui tournent autour du centre de masse du système. La planète demeure invisible, mais sa présence provoque un petit mouvement périodique de son étoile, que l'on cherche à mettre en évidence.

Le moyen le plus simple est de repérer au cours du temps la position du centre de l'étoile sur le plan du ciel ; mais l'amplitude du mouvement est extrêmement faible et encore hors de portée de l'instrumentation actuelle, au moins depuis le sol.

Un autre moyen fait appel à la spectroscopie. Si l'on fait le spectre de l'étoile lorsque, sur son orbite autour du centre de gravité du système, elle se rapproche de l'observateur, son spectre sera décalé par l'effet Doppler-Fizeau vers les longueurs d'onde plus courtes ; inversement, le même spectre sera décalé vers les longueurs d'onde plus grandes lorsque l'étoile sur son orbite s'éloigne de l'observateur. Là aussi, le décalage à mesurer est très petit ; mais en 1995, les Suisses ont pu atteindre une précision de mesure suffisante pour détecter un objet en orbite autour de l'étoile de type solaire *51Pegasi*. Avec cette méthode dite des vitesses radiales, il est possible de déduire la masse de la planète (stricto sensu, une limite supérieure ; notons également que si le système est vu de face depuis la Terre, il n'y a plus d'effet Doppler-Fizeau). Ainsi, *51Pegb*



vue d'artiste 51Pegb © nasa

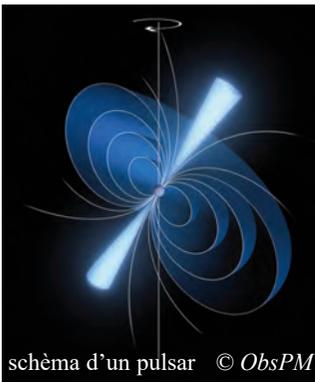


schéma d'un pulsar © ObsPM

(*b* pour désigner la planète autour de 51Peg) possède une masse moitié de celle de Jupiter. Mais la surprise était également dans la période de cette planète – 4,2 jours – ce qui implique (lois de Képler) qu'elle se trouve à 7,5 millions de kilomètres de son étoile, à comparer à la période de Jupiter, 11,9 ans soit 778 millions de km !

Un troisième moyen pour mettre en évidence le petit mouvement périodique de l'étoile autour du centre de gravité du système consiste à trouver une étoile qui soit une horloge extrêmement régulière et chercher si des décalages temporels anormaux apparaissent au cours du temps. Une telle horloge céleste s'appelle un *pulsar*, mais ce peut être aussi une étoile binaire à éclipse ou bien même un système avec une planète déjà connue. C'est en 1992 que de premiers objets ont été détectés autour d'un pulsar (résidu de l'explosion d'une étoile très massive en supernova). Bien que la stricte définition d'une planète extrasolaire soit

d'être en orbite autour d'une étoile *allumée* de la séquence principale (ce que ne sont pas les pulsars, qui en plus sont très rares), ces *planètes-pulsars* représentent néanmoins les corps en orbites régulières les moins massifs connus à ce jour hors du Système Solaire, l'un d'entre eux étant juste un peu plus massif que notre Lune !

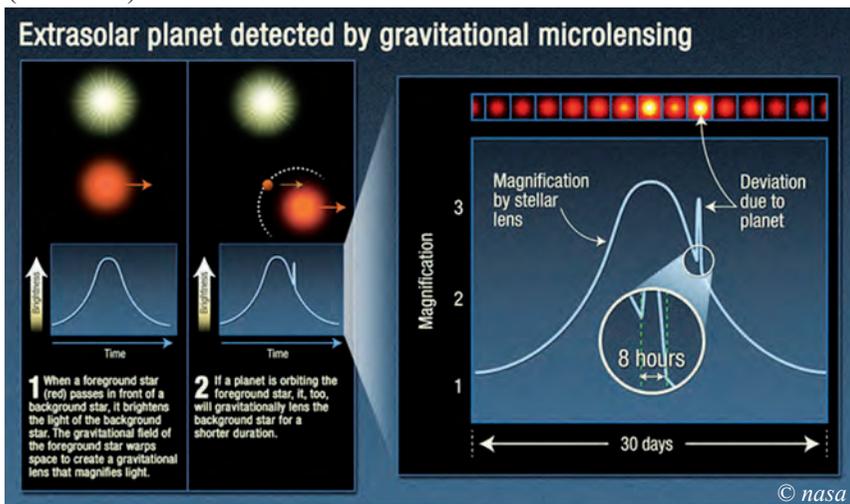
Des observations indirectes aux observations directes

Ces différents moyens sont indirects, la planète demeurant invisible pour deux raisons principales. D'une part, les étoiles comme le Soleil sont environ 10 milliards de fois plus brillantes en lumière visible que les planètes ; le contraste est donc colossal. D'autre part, la séparation angulaire entre une planète et son étoile est très faible ; par exemple, à sa plus grande élongation la distance Soleil-Terre vue depuis 100 années lumière correspond à 0,03" seconde d'angle seulement (un peu moins de 1/1000000°). Ainsi, pour des extraterrestres situés à une trentaine d'années lumière du Soleil, photographier la Terre serait équivalent à vouloir imager depuis Paris un ver luisant placé à 30 cm d'un phare à Marseille !

Cela reste hors de portée des moyens instrumentaux actuels.

Cependant, le rapport des flux dans la lumière infrarouge n'est plus que d'environ 10 millions et depuis 2004, il devient possible de faire des images directes d'objets sub-stellaires.

Il existe par ailleurs deux principales méthodes photométriques de détection d'exoplanètes. La première fait appel à la Relativité Générale d'Einstein. Prenons un observateur regardant une étoile source très lointaine, laquelle bien sûr émet des rayons lumineux dans toutes les directions de l'espace. Supposons qu'entre cet observateur et la source se trouve une autre étoile massive, même invisible. Des rayons lumineux provenant de la source qui, sans étoile intermédiaire, ne passeraient pas par l'observateur, sont *déviés* par la masse de cette étoile intermédiaire (la lentille) et arrivent dans l'œil de l'observateur.

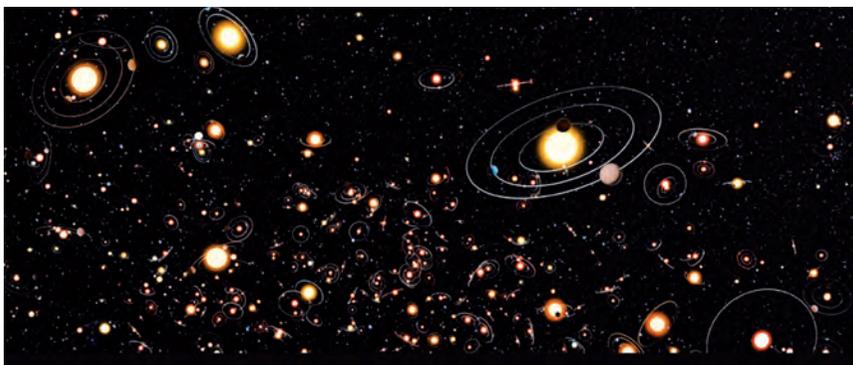


Au final, la présence de cette lentille gravitationnelle provoque pour l'observateur une amplification de la lumière de la source, et lorsque dans leurs mouvements respectifs, les trois – observateur, lentille, source – sont parfaitement, ou presque, alignés, cette amplification est mesurable ; la première détection de cet effet a été réalisée en 1993 simultanément par des équipes française et états-unienne. Supposons maintenant qu'une planète soit en orbite autour de la lentille. Toujours invisible, dans certaines configurations géométriques cette planète pourra elle aussi *dévier* la lumière de la source et provoquer une seconde amplification, bien plus courte, superposée à la première due à son étoile. Cette méthode a donné son premier résultat en 2004 ; depuis, elle a montré qu'elle était capable de détecter des exoplanètes de quelques masses terrestres et cela sans aucun photon de la planète elle-même !

L'autre méthode photométrique s'applique lorsque la Terre se trouve plus ou moins dans le plan orbital du système étoile-planète. Dans ce cas, quand la planète passe devant son étoile elle occulte une fraction du disque stellaire, ce qui se traduit par une diminution de la luminosité de l'étoile. Par exemple, pour des extraterrestres le flux solaire serait diminué d'environ 1% pendant un transit de Jupiter, ce qui est facilement mesurable. Le premier transit d'une exoplanète a été identifié en 1999 avec un petit télescope au sol, puis longuement étudié ensuite avec le Télescope spatial Hubble (HST) ; il s'agissait de HD 209458 b (transit de $\sim 1,4\%$), que nous appelons aussi Osiris. Evidemment, l'avantage de cette méthode est de donner accès à la taille de la planète. Osiris avait été détectée auparavant par la méthode des vitesses radiales. En combinant sa masse et son rayon, on en déduit donc sa masse volumique ($0,34 \text{ g/cm}^3$). C'était la preuve définitive que l'on a bien à faire à une planète géante gazeuse, analogue à notre Jupiter.

A ce jour (mi-avril 2013), 861 planètes extrasolaires ont été détectées dans 677 systèmes planétaires dont 128 possèdent plus d'une planète (jusqu'à 6 actuellement dans quelques cas). Sur les 861, la méthode des vitesses radiales en a fourni plus de 500, dont près de 300 transitent leur étoile.

Si l'on extrapole les résultats actuels à l'ensemble de notre Galaxie la Voie lactée qui compte plus de 100 milliards d'étoiles, le nombre de planètes extrasolaires s'élève sans doute à **plusieurs centaines de millions**, sans compter les petites planètes comme la Terre qui commencent seulement à être détectables. En fait, des études statistiques sophistiquées semblent indiquer la présence de planètes autour de la grande majorité des étoiles.

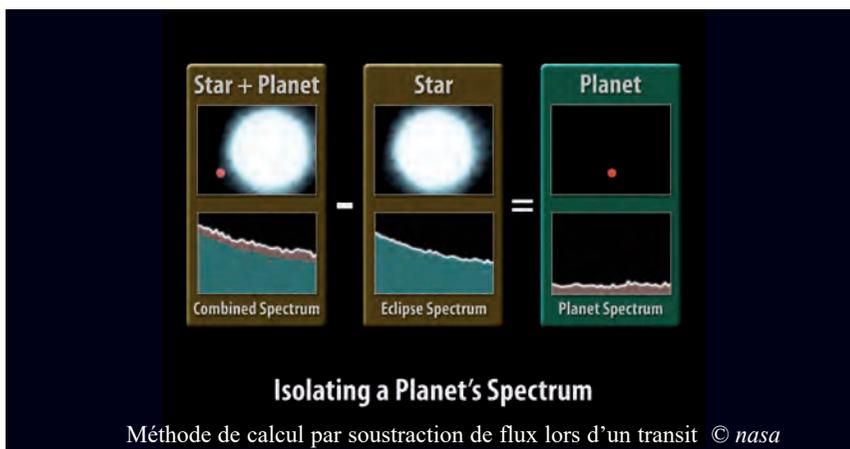


Cette vue d'artiste illustre qu'en moyenne, il existe au moins une planète par étoile dans notre galaxie, la Voie Lactée, et que les planètes de faible masse (bleutées) sont plus nombreuses que les planètes géantes gazeuses (orangées). C'est la conclusion à laquelle est parvenue une étude statistique basée sur six ans d'observation de microlentilles gravitationnelles. © ESO

Les propriétés de ces systèmes sont extrêmement diverses. Par exemple, l'excentricité des orbites est parfois très grande (0,93 dans un cas), contrairement à notre Système Solaire. Mais la plus grande surprise a sans doute été la découverte des *jupiters chauds*, dont les périodes sont inférieures à 5 jours et qui sont donc très proches de leur étoile ; ils représentent environ 20% des exoplanètes connues, dans une situation là aussi très différente du Système Solaire. Le scénario conventionnel de formation des planètes (accumulation de particules de poussières et glaces) implique une formation loin de l'étoile. Or les jupiters chauds sont observés très proches de leur étoile. La théorie est-elle alors mise à mal ? Il semble bien que non car un mécanisme de migration a été proposé (d'ailleurs avant la découverte des exoplanètes) pour rapprocher de son étoile la planète géante en train de se former dans un disque circumstellaire dense en gaz et en poussières.

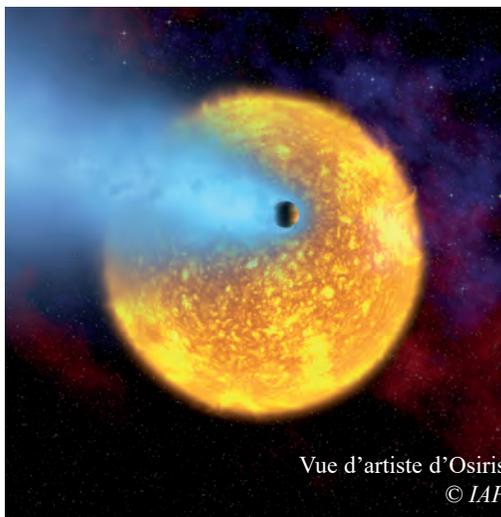
Le transit des planètes

Dans le cas des planètes qui transitent leur étoile, il est possible d'observer directement les photons émis par la planète elle-même lorsque celle-ci passe derrière son étoile. A ce moment-là, le flux provient de l'étoile seule, et par soustraction au flux reçu en dehors de ce transit secondaire, on obtient l'émission thermique de la planète elle-même. Ceci a été réalisé pour quelques jupiters chauds, dans l'infrarouge avec le télescope spatial Spitzer, et il en a été déduit la température effective de la planète – supérieure à 1000 K, 1150 K pour Osiris – ainsi que son albédo. Les planètes qui transitent devant leurs étoiles sont des cibles particulièrement intéressantes pour sonder leur environnement. En effet, pendant le transit la lumière de l'étoile traverse l'atmosphère de la planète et le spectre de l'étoile doit alors révéler les signatures spectrales dues à cette atmosphère.

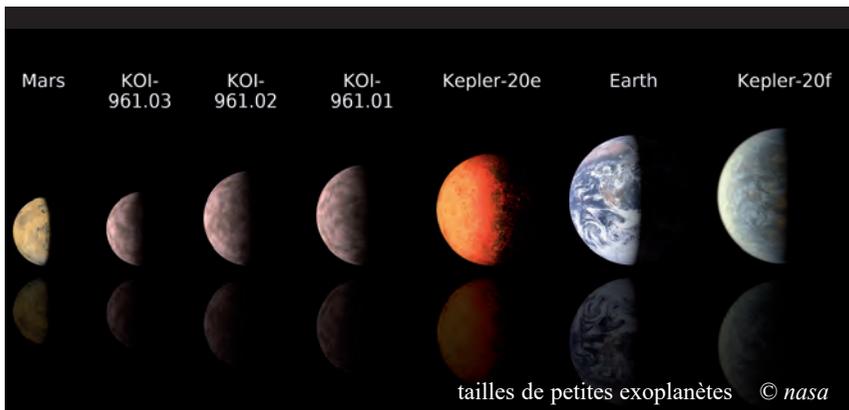


La première détection de l'atmosphère d'une planète extrasolaire fut celle d'Osiris en 2002, dans la lumière du sodium, puis en 2003 et 2004 en hydrogène, carbone et oxygène, toujours grâce à HST.

Là encore, une surprise a surgi. L'absorption additionnelle due à l'atmosphère d'Osiris est si importante pour ces trois derniers éléments qu'il a fallu en conclure que la planète perd de sa masse, car son atmosphère s'évapore violemment. Des molécules sont également détectables.... y compris l'eau.



Ce phénomène d'évaporation peut influencer sur l'évolution de la planète, s'il agit sur une échelle de temps inférieur à l'âge de l'étoile. Il semble que ce pourrait être le cas des exoplanètes ayant les plus courtes périodes (environ moins de trois jours) et des masses inférieures à la moitié de celle de Jupiter. Dans ce cas, l'atmosphère pourrait même finir par disparaître entièrement, en laissant à nu un cœur central rocheux d'une dizaine de masses terrestres, peut-être avec une surface de lave *active* similaire à celle de Io (le satellite de Jupiter). Mais cela reste à confirmer.





Le satellite français CoRoT lancé en décembre 2006, cherche des exoplanètes par la méthode du transit. Début 2009, il a annoncé la découverte d'une exoplanète de rayon 1,7 fois celui de la Terre. La mission KEPLER de la NASA lancée en mars 2009 a déjà identifié quelques milliers de transits dont probablement la majorité sera confirmée comme planètes.

La course aux exoplanètes de moins en moins massives continue donc de plus belle. Très récemment, une exoplanète pas plus massive que notre Terre a été détectée autour de l'étoile la plus proche du Système Solaire, α Centauri B. Par ailleurs, on connaît quelques cas d'exoplanètes situées dans la *zone habitable* de leur étoile hôte, comme la Terre ou Mars sont dans la zone habitable du Soleil, c'est-à-dire la zone où l'eau (s'il y en a) peut être liquide. Enfin, des variations temporelles de la signature spectrale de l'évaporation de l'atmosphère d'une planète extrasolaire viennent d'être interprétées comme la manifestation pour la première fois de l'influence de l'étoile hôte sur l'atmosphère (ce qu'on appelle la météorologie spatiale dans le cas de notre Système Solaire). L'ultime défi sera de mettre en évidence des signatures spectrales dues, sans ambiguïté, à des mécanismes biologiques.

R.F.

La Terre l'homme et l'espace

Brigitte Godard

Médecin MEDES au
Centre Européen des Astronautes

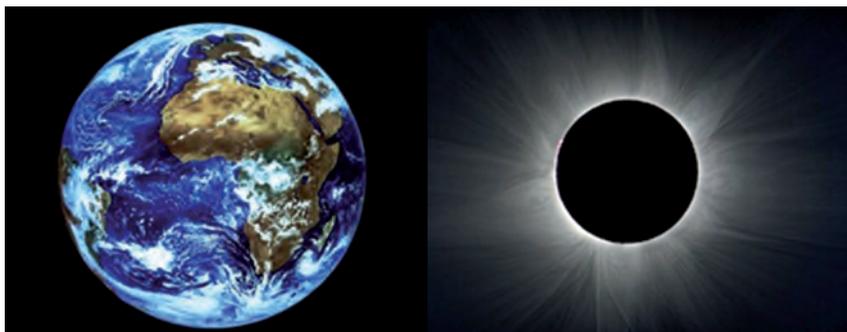


Elle est belle notre Terre, il y fait bon vivre et elle est accueillante avec ses merveilleuses couleurs.

Qui pourtant n'a rêvé de la voir de l'espace ?

Qui pourtant n'a rêvé de s'envoler de ses propres ailes pour l'admirer ?

Qui n'a rêvé, parfois, d'aller habiter dans un autre monde ?



La planète Terre

© nasa

Eclipse de soleil en Chine

© B.Godard

Il suffit de s'éloigner de notre Terre, pour se rendre compte combien l'homme est parfaitement adapté à la vie sur cette planète et combien il est important de la préserver.

Les réflexions des astronautes, leurs réactions et les modifications de leur corps au sens physique et physiologique notées par leurs médecins, nous montrent que l'homme est en symbiose avec notre planète qui nous est si familière et que, pourtant, l'on respecte si peu.

Seule une poignée d'aventuriers, astronautes et cosmonautes, ont pu quitter notre Terre et assurent depuis 50 ans une présence humaine dans l'espace. Ces explorateurs d'un monde nouveau ont de grandes difficultés à revenir sur Terre et à se réadapter à cet environnement pourtant amical.



A gauche la pointe du Hoc, à droite la nature avec sa flore © B.Godard

La Terre nous façonne et nous protège

L'homme et la pesanteur

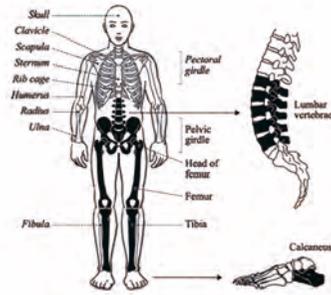
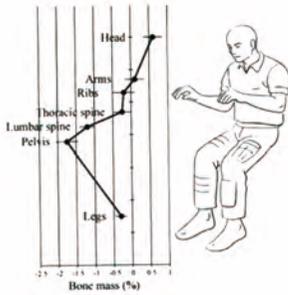
Sur Terre nous sommes soumis à la *pesanteur*, notion bien difficile à décrire. Nous la subissons tous depuis notre naissance mais les astronautes doivent réapprendre à vivre avec, à leur retour d'un séjour à bord de la Station Spatiale Internationale. La pesanteur, force qui nous attire et nous maintient sur la Terre, structure complètement le corps humain. Sur le plan physiologique le plus bel exemple et le plus facile à comprendre est celui des muscles et des os. Ils se sont développés pour nous éviter de nous effondrer sur le sol. Grâce à eux, nous pouvons marcher, courir, sauter, faire tout ce que nous voulons, sauf voler, car cela nous demanderait une énergie beaucoup trop importante.

Le cœur, muscle à part entière, travaille très dur pour permettre l'acheminement du sang vers tous les tissus et apporter aux cellules des aliments indispensables sous forme d'oxygène et de glucose essentiellement.

Retirez la pesanteur et vous n'avez plus besoin de toute cette puissance musculaire et osseuse pour vous maintenir debout. Si vous vous contentez d'un bref séjour en impesanteur, ou apesanteur, tels ceux générés par les vols paraboliques, le corps peut réagir par un mal des transports mais la brièveté de ce séjour n'a pas d'incidence sur vos muscles et vos os. En revanche, si votre corps se retrouve dans une pesanteur moindre ou nulle pendant un certain temps, il va s'adapter à son nouvel environnement. C'est ce qui se passe à bord de l'ISS pour nos astronautes. Le corps est libéré de cette forte pesanteur et peut se mouvoir aisément. Il n'a plus besoin d'utiliser tous ses muscles car l'astronaute se déplace non plus en station verticale mais horizontale et il utilise plus ses bras, avant-bras et mains que ses jambes. C'est pourquoi au retour celles-ci sont devenues si faibles, avec une grosse perte musculaire et osseuse.

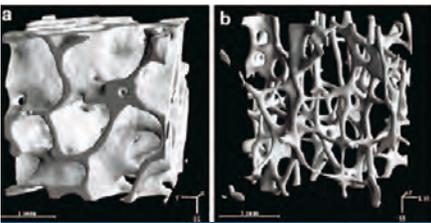


L'ingénieur de vol, Sunita Williams de la 32^{ème} mission ISS, © nasa



A gauche, pourcentage de masse osseuse perdue selon les régions du corps en moyenne après un mois de vol spatial. ©MEDES
 A droite, les régions épaissies sont celle qui sont le plus affectées. © G.Clément

Pour le cœur, c'est la même chose, il va fonctionner différemment, à minima, si on peut dire. Quand nous sommes debout en pesanteur, la pompe cardiaque telle un shaddock endiablé doit pomper, pomper, pomper pour faire circuler le sang vers les parties inférieures et surtout supérieures du corps. En apesanteur le muscle cardiaque fournira moins d'effort. Et tout comme un sportif qui diminue sa cadence, il s'atrophie. Tant que l'astronaute reste dans cet environnement, tout va bien, mais plus il y reste, plus il va perdre de muscles et plus le retour sera difficile. C'est donc dans un état post-traumatique que l'astronaute revient sur Terre et il devra subir un long processus quotidien de réhabilitation neuromusculaire.



a) Microarchitecture en 3D d'un os normal.
 b) Microarchitecture en 3D d'un os atteint d'ostéoporose. © SCANCO Medical

Que peut-on faire pour essayer de prévenir cette perte musculaire et osseuse du terrien qui quitte sa planète ? Simuler la pesanteur ou faire travailler les muscles ? Simuler l'environnement terrestre serait l'idéal, mais reste, pour l'instant du domaine de la science-fiction ! La solution retenue à l'heure actuelle est donc de faire travailler les muscles.

Un exercice quotidien de deux heures évite que notre astronaute ne se retrouve grabataire après six mois de mission. C'est le rythme adopté pour les missions longue durée dans l'espace et même si ce n'est pas aussi efficace que le travail constant que nous impose la gravité, cela aide à réduire le temps

Luca Parmitano s'entraînant à la NASA avec le même équipement ARED que celui utilisé à bord de la station ARED : Advance Resistive Exercise Device

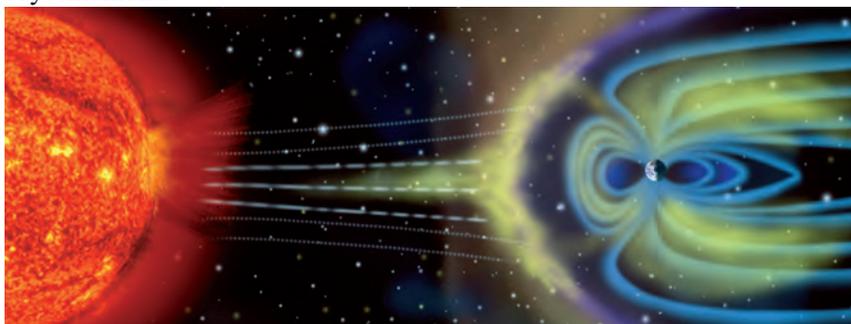
© nasa



d'adaptation au retour et pour l'instant, suffit à prévenir des complications plus graves liées à l'insuffisance musculaire et osseuse, telle que fractures ou déchirures musculaires. Si vous pensez que la solution est d'envoyer des sportifs dans l'espace, vous faites erreur, car plus vous aurez un fort potentiel musculaire avant de partir, plus il sera difficile de le maintenir ... et plus la perte sera grande. N'oublions pas que l'astronaute va dans l'espace pour travailler sur de nombreuses expériences qui enrichissent nos connaissances dans toutes les sciences et ne peut faire plus de sport que ce qui est préconisé.

L'homme et les radiations

Sur Terre, nous sommes protégés des radiations par l'atmosphère et la magnétosphère. Le problème des radiations est bien différent de celui de la pesanteur ... car il ne se voit pas à court terme. Les radiations sont sans odeurs, sans couleurs visibles pour notre œil mais ont des conséquences insidieuses sur le système humain. Si nous savons déterminer quelles sont les limites d'exposition acceptables, il nous reste encore beaucoup à apprendre. Aucun modèle ne nous permet de les étudier. En effet les radiations utilisées par exemple en thérapie dans le cadre des cancers, ne font pas du tout appel aux mêmes sources, et n'ont pas la même force. Dans l'espace on va retrouver des radiations de beaucoup plus haute énergie avec un impact plus grand. Il peut s'y ajouter des événements solaires inattendus comme, par exemple, les éruptions solaires au cours desquelles il y a émission de particules, vent solaire, ions lourds qui ne nous parviennent pas sur Terre. Nous n'avons aucun modèle même approximatif pour tester ces rayonnements, contrairement à la microgravité que l'on peut simuler dans des vols paraboliques et des expériences d'alitement prolongé. La possibilité de trouver des marqueurs génétiques pour déterminer si une personne est plus sensible qu'une autre aux rayonnements est une voie de recherche. Mais, pour l'instant, seule la limitation de durée de séjour dans l'espace atténue l'impact de ces rayonnements.



Vue d'artiste de la magnétosphère terrestre

© Nasa

L'homme face aux débris interstellaires et autres contrariétés

Dans l'espace règne le vide, un froid proche du zéro absolu et de nombreux débris de toute nature, débris satellitaires, météorites ... Cet environnement agressif et délétère pour l'homme nécessite pour survivre toutes sortes de protection. La Station Spatiale est son cocon et les scaphandres autorisent de rares et courtes sorties extravéhiculaires.

Et, de fait, l'astronaute va se trouver dans un environnement clos, étroit, ... même si cela semble un grand laboratoire dans l'espace, la station est finalement bien petite pour accueillir six astronautes avec tous leurs équipements.

Quelles sont donc les conséquences de la vie dans un tel habitacle ?

- La promiscuité ; il faut apprendre à vivre en commun pendant six mois.
- La gestion de toutes les particules apportées dans la station ; que faire des poussières et autres débris de toute nature ?
- Le contrôle régulier de tous les paramètres environnementaux, chimiques, toxiques, microbiologiques.



En haut à gauche les échos radar des plus gros débris qui orbitent autour de la Terre

© CNES, en haut à droite vue générale de l'ISS © nasa.

En bas à gauche, sortie extravéhiculaire en scaphandre © nasa, en bas à droite l'équipage de la mission 32 dans son lieu de vie © nasa.



Comme l'enfant qui, après de longues vacances loin des contraintes habituelles, est heureux de revenir dans son environnement familial, l'astronaute retrouve avec plaisir, le sol de notre Terre.

Il en est, heureusement, toujours ainsi et Luca Parmitano, astronaute européen qui partira en mai 2013, pour un séjour de six mois à bord de l'ISS et effectuera deux sorties extra-véhiculaires, n'échappera pas à cette règle.

Une fois passé les premiers jours de lutte pour se réhabituer à la gravité, il fera bon retrouver sa famille, son lit, ses petits plats préférés, ses habitudes et même de s'exiler au bord de la mer...



Toutes ces belles choses que nous offre la Terre, si riche, si belle et si accueillante pour qui sait la regarder et l'apprécier.

B.G

MEDES (Institut de physiologie et de Médecine Spatiale, Toulouse, France) a pour missions de développer la médecine spatiale et ses applications.

L'alitement est un des modèles de simulation des effets de l'impesanteur utilisés au sol. Il permet d'obtenir d'importantes informations. Celles-ci concernent notamment les mécanismes régulant l'adaptation de notre corps au changement de répartition des liquides et les réactions liées à l'inactivité. Les sujets doivent rester couchés 24h/24h pendant toute la durée de l'expérience. Plusieurs facteurs de l'environnement existant dans l'espace sont reproduits par ce modèle. Simuler de la microgravité principalement sur le système cardio-vasculaire, la régulation hormonale et la balance énergétique, le système musculaire, osseux et l'équilibre phospho-calcique. Le comportement psychologique est aussi étudié.



Campagne alitement prolongé WISE 2005. Il faut s'assurer que 6 degrés d'inclinaison sont respectés pour simuler parfaitement la microgravité.

© CNES

L'auteur, B.Godard, Médecin MEDES, actuellement en poste au Centre Européen des Astronautes à Cologne est en charge de l'astronaute européen Luca Parmitano. *NDLR*

Influences astronomiques sur le climat du passé

Roland Lehoucq

Astrophysicien au CEA

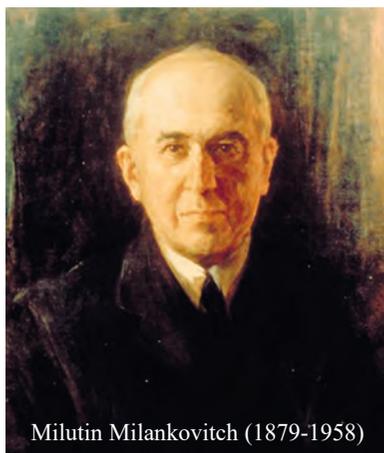


Depuis les travaux du géologue suisse Louis Agassiz, en 1837, on sait que des changements importants du climat avaient eu lieu dans le passé, avec des alternances entre périodes glaciaires et interglaciaires.

Ainsi, le dernier maximum glaciaire est survenu il y a 20 000 ans, période durant laquelle des glaciers recouvraient une très grande partie de l'Amérique du Nord et s'étendaient en Europe sur toute la Scandinavie. En 1842, le mathématicien français Joseph-Alphonse Adhémar fut le premier à proposer que des variations de l'orbite de la Terre autour du Soleil pourraient être responsables de ces grands cycles climatiques. Sa théorie suggérait que les glaciations étaient produites par les variations de la durée des saisons dues à la précession des équinoxes. Cette proposition fut reprise en 1864 par le scientifique écossais James Croll qui élaborait, de façon plus détaillée, la première théorie astronomique des paléoclimats.

L'intérêt pour la théorie astronomique des climats prit un nouvel essor entre 1924 et 1940 avec la publication des travaux du géophysicien serbe Milutin Milanković.

Selon lui, les variations quasi-périodiques des paramètres de l'orbite terrestre (excentricité, obliquité et précession de l'axe de rotation, voir Figures 1 à 3) produisent un forçage sur le climat en faisant varier le flux énergétique solaire. Ces variations sont amplifiées par les rétroactions du système climatique terrestre comme l'albédo de surface, les gaz à effet de serre ou les courants marins.



Milutin Milankovitch (1879-1958)

Variations séculaires de l'excentricité de l'orbite terrestre.

Rappelons d'abord que l'excentricité caractérise le degré d'aplatissement d'une ellipse : plus elle est élevée, plus l'ellipse s'éloigne du cercle.

Le mouvement de la Terre autour du Soleil suit une ellipse que l'action gravitationnelle des autres planètes tend à déformer. L'excentricité de l'orbite terrestre est actuellement très faible, de l'ordre de 0,017 et les perturbations planétaires entraînent des variations lentes de celle-ci qui varie entre 0,005 (un quasi-cercle) et 0,058 (ellipse légèrement aplatie).

En première approximation, ces variations résultent de la combinaison de signaux cycliques de périodes de 95 000, 123 000 et 413 000 ans.

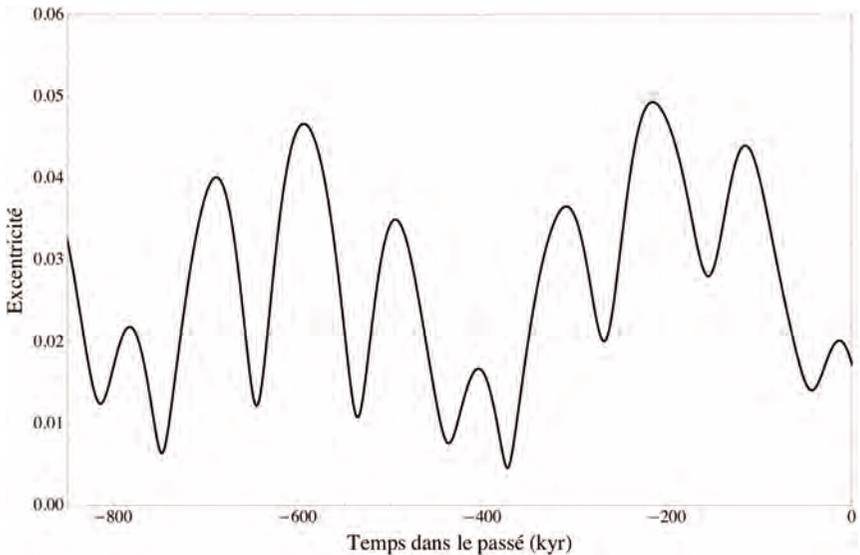
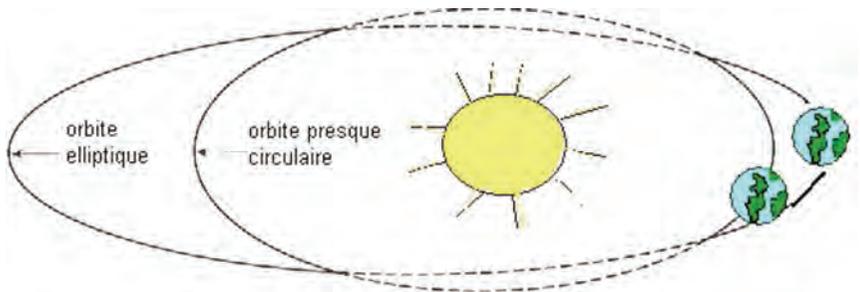


Figure 1 : *Excentricité*
Variations séculaires de l'excentricité.



Variations séculaire de l'obliquité de la Terre

L'obliquité est l'inclinaison de l'axe de la Terre par rapport à son plan orbital. L'obliquité est à l'origine des saisons et module au fil de l'année la puissance surfacique solaire reçue aux différentes latitudes. Elle évolue aussi au cours du temps à cause des perturbations planétaires.

L'oscillation de l'obliquité terrestre reste très limitée, variant de $22,1^\circ$ à $24,5^\circ$ avec une période voisine de 41 000 ans.

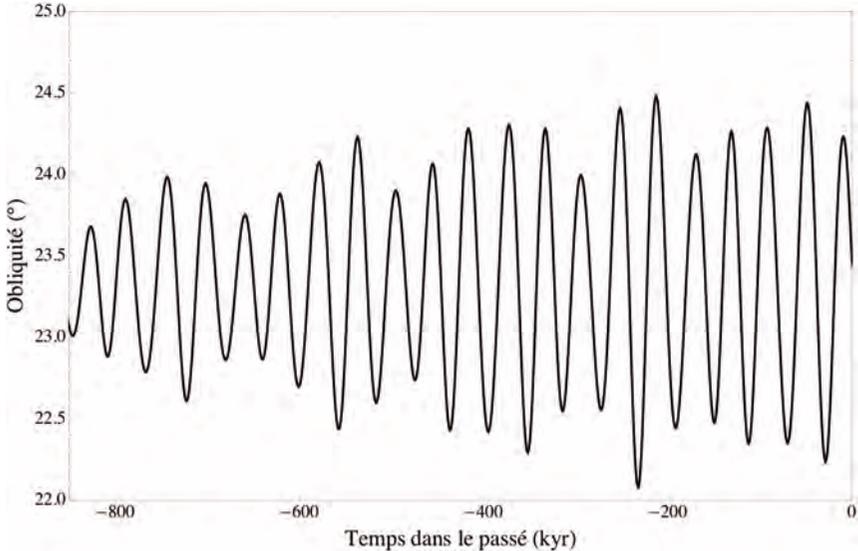
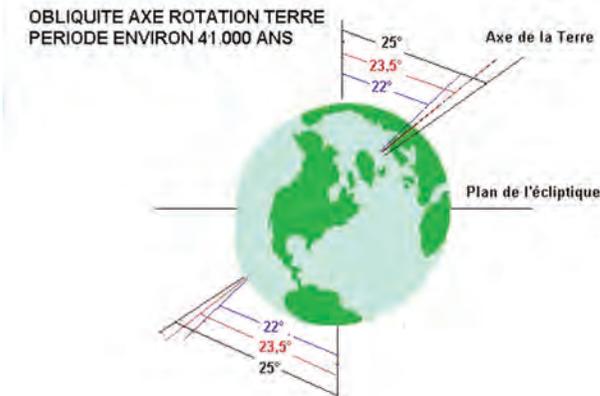


Figure 2 : *Obliquité*
Variations séculaires de l'obliquité.



FX

Variations séculaires de la précession climatique

La précession est un changement de direction de l'axe de la Terre. Celle-ci n'étant pas sphérique mais légèrement aplatie sur les pôles, les forces gravitationnelles exercées par le Soleil et la Lune tendent à changer la direction l'axe de rotation terrestre. Celui-ci décrit alors un cône, comme le ferait l'axe d'une toupie, et fait un tour complet en environ 25 700 ans. Cela entraîne un décalage régulier de la position des solstices et des équinoxes. A cet effet s'ajoute le fait que le grand axe de l'ellipse orbitale terrestre tourne aussi progressivement autour du Soleil. Finalement, la position de la Terre sur l'ellipse à un moment précis de l'année, l'équinoxe de printemps par exemple, évolue dans le temps.

Ce phénomène de précession climatique s'effectue avec des périodes proches de 19 000 et 23 000 ans. Plus concrètement, le solstice d'été a actuellement lieu vers le 21 juin à proximité de l'aphélie (aux alentours du 4 juillet), ce qui permet de tempérer les étés de l'hémisphère Nord. A l'inverse, nos hivers sont moins rigoureux car le solstice d'hiver a lieu vers le 21 décembre, non loin du passage au périhélie (aux alentours du 4 janvier). L'hémisphère Sud est dans la situation opposée. Il y a environ 11 500 ans, la situation était inversée, plaçant le solstice d'été au périhélie de l'orbite et engendrant ainsi des étés très chauds et des hivers très froids dans l'hémisphère Nord.

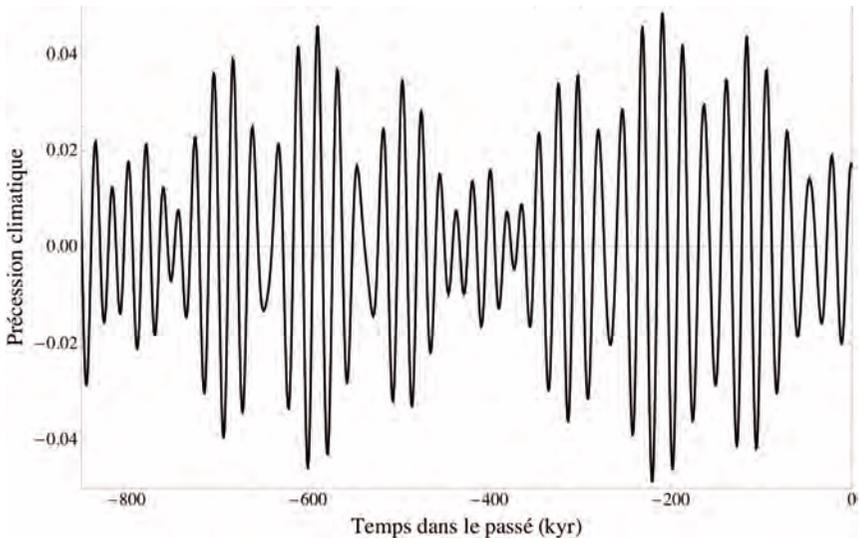


Figure 3 : *Précession*
Variations séculaires de la précession climatique.

A partir des années 1950, la conjugaison de l'amélioration des solutions astronomiques et des données géologiques et géochimiques a permis de tester et de valider progressivement l'idée d'une influence astronomique dans la variabilité climatique ancienne. Mais c'est un article publié en 1976 par Hays, Imbrie et Shackleton qui démontra pour la première fois la présence des cycles de l'excentricité, de l'obliquité et de la précession dans la variation de la température de surface de l'océan Indien. Leur estimation de température se fondait sur l'analyse de deux carottes de sédiments déposés pendant les 450 000 dernières années. Le spectre de Fourier de leurs données permit de montrer que les fréquences fondamentales des variations climatiques étaient très proches de celles des cycles astronomiques. En 2007, le projet EPICA (European Project for Ice Coring in Antarctica) a foré les glaces profondes de l'Antarctique ce qui a permis de remonter aux variations de température jusqu'à 800 000 ans dans le passé (Figure4).

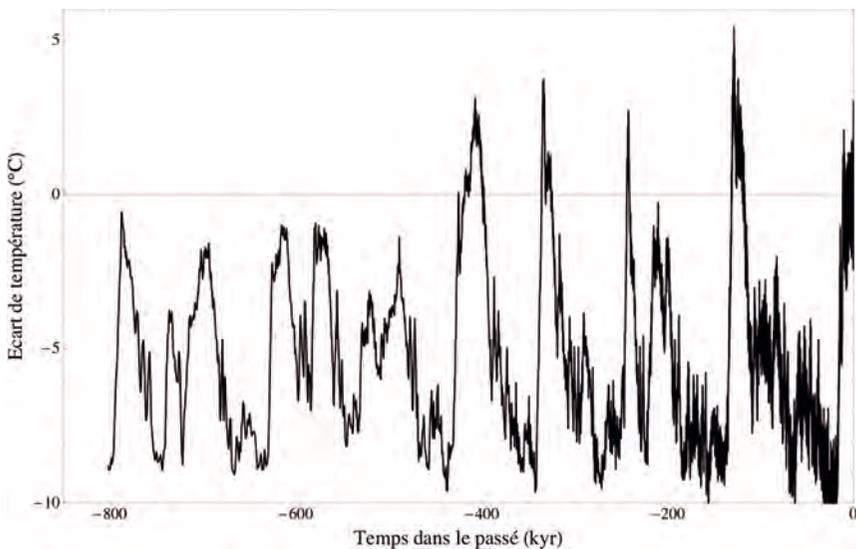


Figure 4 : *EPICA*

Variations de la température (écart avec la moyenne constatée sur le dernier millénaire) estimée à partir des mesures de l'abondance de deutérium dans une carotte glaciaire prélevée à Dôme C (Antarctique). Cette carotte a permis de remonter 800 000 ans dans le passé.

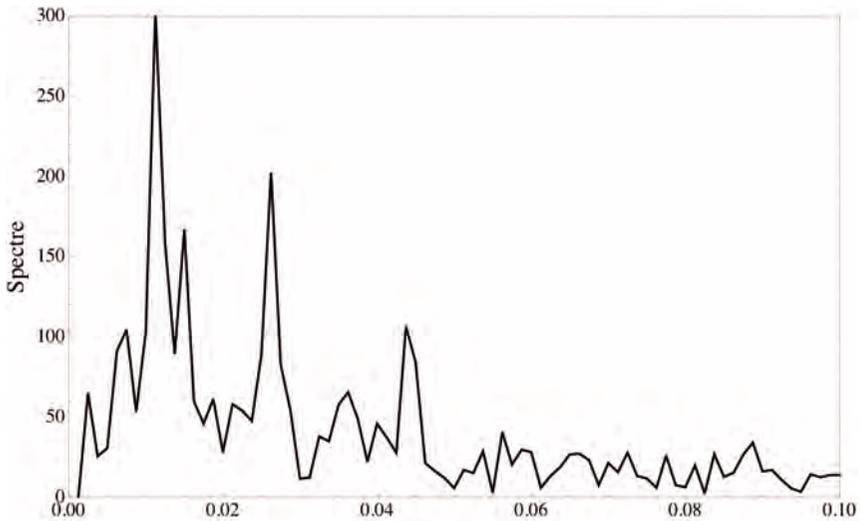


Figure 5 : *Spectre*

Spectre de Fourier des variations séculaires de température relevée à Dôme C. Les principaux pics correspondent à des périodes de 89 000, 38 000 et 23 000 ans, proches des périodes astronomiques.

Les outils et les données (voir la webographie) désormais disponibles permettent de refaire le cheminement intellectuel qui a permis d'aboutir aux théories astronomiques du climat. Là encore, l'analyse spectrale de ces variations de température permet de vérifier l'importance des cycles astronomiques terrestres (Figure 5).

Indubitablement, les changements orbitaux de la Terre jouent le rôle d'un métronome pour les variations climatiques séculaires.

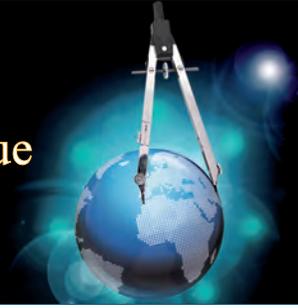
R.L.

Webographie pour en savoir plus :

- J. D. Hays, J. Imbrie, and N. J. Shackleton, *Variations in the earth's orbit: pace-maker of the Ice Ages*, Science 194 (1976), 1121-1132.
<http://www.mantleplumes.org/WebDocuments/Hays1976.pdf>
- J. Jouzel et al., *Orbital and millennial Antarctic climate variability over the past 800,000 years*, Science 317 (2007), 793-797.
- Les données du forage EPICA sont disponibles sur le site : <http://www.ncdc.noaa.gov/paleo/pubs/jouzel2007/jouzel2007.html>
- Les variations orbitales terrestres depuis 5 millions d'années calculées par l'astronome belge André Berger : <ftp://ftp.ncdc.noaa.gov/pub/data/paleo/insolation/>
- Site du logiciel Analyseries qui permet de faire l'analyse spectrale des variations paléoclimatiques : <http://www.lscce.ipsl.fr/logiciels/>
- Le travail d'un étudiant qui analyse les variations paléoclimatiques en terme de transformée de Gabor (au lieu de Fourier), qui est une analyse en ondelettes : <http://johncarlosbaez.wordpress.com/2013/01/30/milankovich-vs-the-ice-ages/>

Prédire l'évolution des glaciers alpins par la simulation numérique

Guillaume Jovet
Université libre de Berlin



Depuis plus d'un siècle, les glaciers alpins reculent. Cette tendance s'amplifiera inévitablement si le climat se réchauffe davantage. Pour prédire l'évolution future des glaciers, il nous faut construire un modèle mathématique qui combine hydrologie, climatologie et mécanique.

En effet, le mouvement des glaciers résulte de la combinaison de plusieurs phénomènes comme l'indique la Figure 1. D'un côté, les précipitations neigeuses et la fonte cumulées ajoutent de la glace sur les parties élevées, *zones d'accumulation* et enlèvent sur les parties basses, *zones d'ablation*. D'un autre côté, la glace se déforme comme un fluide sous l'effet de la gravité. De plus, les vitesses des particules de glace sont amplifiées par le glissement de la glace contre le lit rocheux. Le mouvement de la glace est ainsi régi par les lois de la mécanique des fluides et des solides.

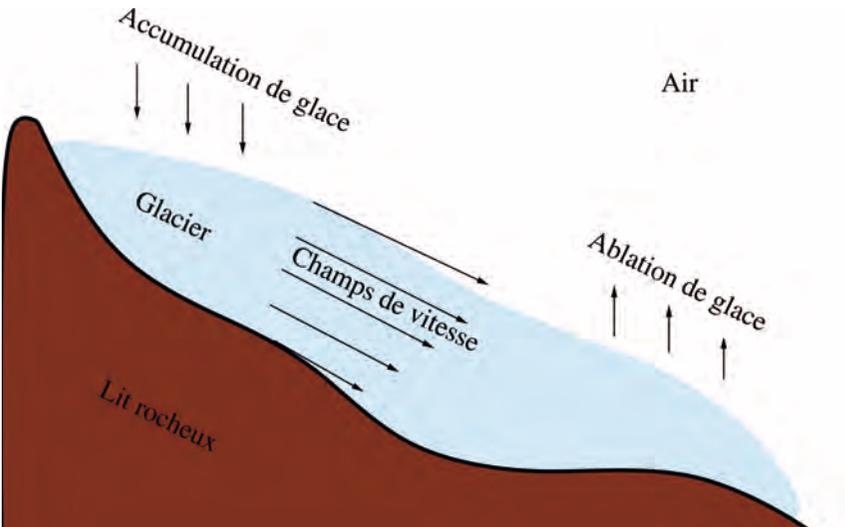
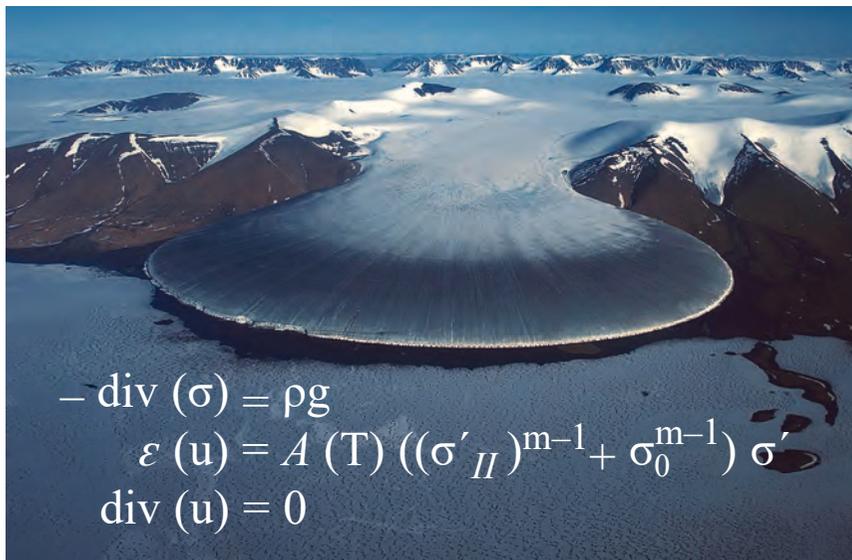


Figure 1 :
Schéma des mécanismes qui régissent le mouvement des glaciers.

La glace est un fluide qui coule

Bien que le mouvement des glaciers soit connu depuis le XVIII^e siècle, l'écoulement de la glace, tel un fluide visqueux, n'a été admise qu'au XX^e siècle. Dans les années 1950, le glaciologue J.W. Glen procéda à des expériences sur des blocs de glace afin de déterminer sa déformation sous l'effet de contraintes appliquées en traction, compression et cisaillement. Le verdict tomba : la relation entre déformation et contrainte (appelée plus tard loi de Glen) est non linéaire, ce qui fait de la glace un fluide dit *non newtonien*, contrairement à l'eau. En tant que fluide, la glace et l'eau se différencient aussi par leur viscosité. En effet la viscosité de la glace est telle que les effets d'accélération sont négligeables (environ 10^{16} fois celle de l'eau). Ainsi, contrairement à l'eau, les vitesses des particules de glace à un instant donné ne dépendent que de la géométrie du glacier (épaisseur et pente du terrain) et pas des vitesses aux instants précédents. Pour compléter la loi de Glen, une relation entre viscosité et température de la glace est établie. En effet, une glace froide se déforme moins facilement qu'une glace proche du point de fusion. Les équations de la mécanique de la glace se résument à un problème de Stokes :



$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) &= \rho \mathbf{g} \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) &= A(T) \left((\boldsymbol{\sigma}'_{II})^{m-1} + \sigma_0^{m-1} \right) \boldsymbol{\sigma}' \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) &= 0 \end{aligned}$$

Figure 2 :

Les équations ci-dessus expriment respectivement la conservation de la quantité de mouvement, la loi de Glen et l'incompressibilité de la glace.
Le glacier de la patte d'éléphant au Groënland - © Guardian UK

Pour être complet, ce problème nécessite une condition au bord du domaine de glace, qui est décrite par le glissement entre glace et roche.

La glace est un solide qui glisse

La déformation visqueuse de la glace n'explique pas à elle seule le mouvement des glaciers. En effet, la glace peut aussi glisser sur le lit rocheux en présence d'eau de fonte qui joue le rôle de lubrifiant. Cela se produit en particulier à la langue du glacier où les températures de la glace sont les plus proches de zéro, alors qu'aux parties plus élevées les températures sont suffisamment froides pour que la glace accroche au lit rocheux. Contrairement à la déformation de la glace, le glissement est mal connu et donc plus difficile à modéliser. En effet, le glissement est directement relié au niveau d'eau (un glacier stocke de l'eau comme une éponge) lequel peut varier fortement dans la journée. Par ailleurs, le glissement dépend aussi de la rugosité du terrain qui est souvent inconnue. De plus, il est très difficile d'accéder à la base du glacier pour y effectuer des mesures. En dépit de ces incertitudes, il existe aujourd'hui des modèles de glissements empiriques qui reproduisent bien la réalité.

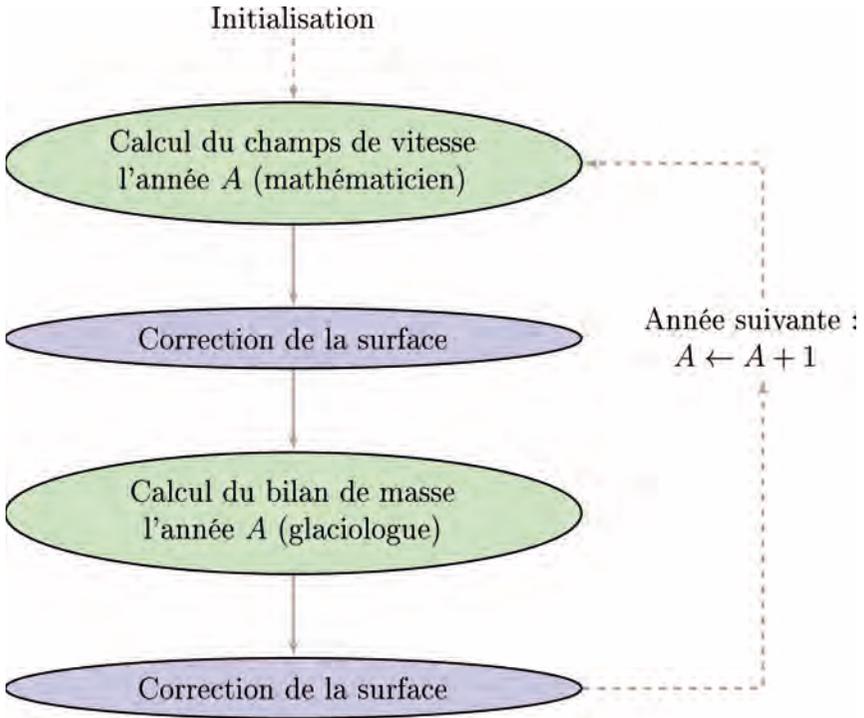
Le rôle des mathématiciens

Il est malheureusement impossible de résoudre exactement le problème de Stokes du fait des complexités des équations et des géométries. C'est pourquoi dans la pratique on procède à une approximation du problème en *discrétisant* l'espace et le temps, ce qui signifie que l'on cherche à approcher la solution en certains points et à certains instants. Finalement, résoudre le problème de Stokes discrétisé revient à résoudre une suite de systèmes linéaires, ce que nombre d'algorithmes bien connus peuvent faire. Pour simuler un glacier, il faut être capable de résoudre de nombreux systèmes d'équations dont la taille atteint facilement le million d'inconnues, ce qui peut prendre des jours de calcul même pour les ordinateurs les plus récents. Les mathématiciens ont recours à plusieurs stratégies pour réduire les temps de calculs. L'une d'elle consiste à paralléliser leurs algorithmes de résolution, c'est-à-dire à diviser efficacement le problème principal en sous-problèmes traités individuellement sur des processeurs différents. Un autre rôle essentiel des mathématiciens est de s'assurer de la convergence théorique et pratique de la solution approchée vers la solution exacte lorsque le nombre de points de discrétisation (ou d'inconnues) augmente.

Combiner les calculs des mathématiciens et des glaciologues

Si le calcul du mouvement de la glace revient aux mathématiciens, évaluer l'impact des précipitations neigeuses et de la fonte sur le glacier est le travail des glaciologues. Ces deux communautés doivent donc combiner leurs calculs pour simuler l'évolution des glaciers sur une période de temps. Supposons que la surface d'un glacier soit connue une certaine année A. Tout d'abord, les mathématiciens calculent le champ

de vitesse de la glace l'année A en résolvant les équations de Stokes puis modifient la surface du glacier en conséquence. Ensuite, les glaciologues calculent la différence cumulée entre l'accumulation et la fonte de glace pendant l'année A et corrigent la surface du glacier en conséquence. Finalement, il en résulte une approximation de la surface du glacier l'année suivante A+1. Ce processus est répété autant de fois qu'il y a d'années à simuler, comme le résume le schéma suivant :



La méthode permet de simuler aussi bien un glacier sur une période passée que future.

Simuler le passé pour valider le modèle

En utilisant des données de températures et de précipitations, le glacier du Rhône (Suisse) a été simulé de 1874 à 2008. Nous pouvons comparer sur la Figure 4 le résultat de la simulation à des images d'archives.

Nous constatons que la simulation est fidèle à la réalité, ce qui valide le modèle.



1874



1900



1932



1960

Figure 4 :
Photographies du glacier du Rhône (à gauche) et simulation (à droite).

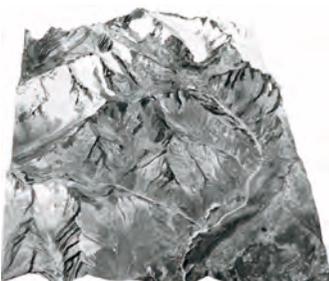
Simuler le futur selon des scénarios climatiques

Bien entendu, aucune donnée météorologique n'est disponible pour le futur. Par conséquent, nous considérons plusieurs scénarios climatiques pour le 21^e siècle.

Figure 5 :
Glacier
d'Aletsch en
1999 et 2100
selon les scénarios
climatiques
1, 2 et 3.



1999



2100 scénario 1

La Figure 5 montre le résultat de la simulation du glacier d'Aletsch (Suisse) en 2100 pour trois scénarios choisis.

Le *scénario 1* est basé sur une augmentation des températures d'environ de 4 degrés Celsius en 2100. Il s'agit à l'heure actuelle du scénario le plus réaliste. Selon ce scénario, le glacier aurait quasiment disparu avant la fin du siècle.



2100 scénario 2

Le *scénario 2* est basé sur le climat des 20 dernières années, lequel a été marqué par une augmentation des températures d'environ 0.5 degrés Celsius. Selon ce scénario, le glacier accuserait un retrait de plus de 5 kilomètres. Il s'agit du retrait auquel on devrait s'attendre si le climat se figeait (sans augmentation additionnelle des températures).



2100 scénario 3

Enfin, le *scénario 3* considère un improbable nouvel âge glaciaire à venir. Selon ce scénario, la langue glaciaire croîtrait considérablement jusqu'à atteindre un état comparable à celui observé durant le petit âge glaciaire (1350-1850).

G.J.

Pour en savoir plus :

Voir le film de 5 minutes réalisé par l'auteur (version française) sur <http://page.mi.fu-berlin.de/jouvet/>

Amédée Zryd, *Les glaciers en mouvement, La population des Alpes face aux changements climatiques*, Presses Polytechniques Romandes, Savoie Suisse, 2008.

L'eau dans tous ses états

Hervé Lehning



Au scientifique, les états de l'eau évoqueront les trois phases de la matière : gaz, liquide et solide même si, dans ce cas, on parle plutôt de vapeur, d'eau et de glace... avec quelques états intermédiaires comme la neige ou l'eau en train de geler.

Les trois états
de l'eau sont
présents
sur cette vue
de Qassiarsuq,
au Groenland.



Les nuages ne sont toutefois pas formés de vapeur d'eau à proprement parler mais de minuscules gouttelettes... qui résultent de la condensation de la vapeur par refroidissement. Il n'est donc pas exagéré de parler de vapeur puisque le nuage en est le résultat visible.

Nuage de vapeur
aux geysers
d'el Tatio, au Chili.



Les nuages prennent diverses formes, et diverses couleurs. La plus ou moins grande difficulté de la lumière solaire à les traverser explique ces différences et, en particulier, qu'un nuage soit plus clair sur son bord qu'en son centre.



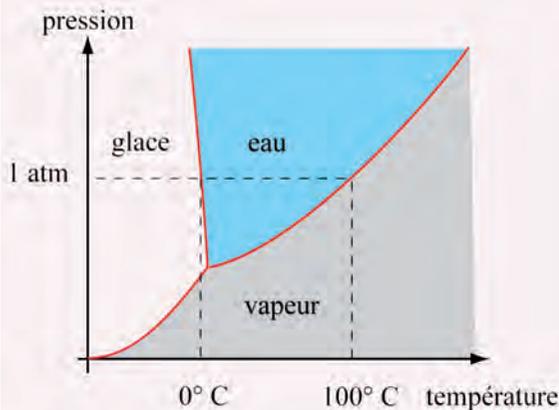
Nuages en formation au-dessus du col de Chamoussière, dans les Hautes-Alpes. On y remarque des différences de couleurs.



Ciel précédant l'orage sur le Goléon, dans les Hautes-Alpes.

Les phases de l'eau

L'eau bout à 100°C ... si la pression est égale à une atmosphère, donc au niveau de la mer. En altitude, la pression est plus basse, l'eau bout à une température plus faible. Vers 5000 mètres d'altitude, l'eau bout à 80°C environ, comme le montre le diagramme des phases de l'eau ci-dessous.



Le point triple de la courbe rouge voit la coïncidence des trois états.

Il correspond à une pression de $0,06$ atmosphère et une température de $0,01^{\circ}\text{C}$.

Brume et luminosité

L'eau en suspension dans l'air, sous forme de gouttelettes invisibles à l'œil nu, modifie de plus la luminosité, source d'esthétiques diverses.



Glacier dans la brume
dans le massif du Pelvoux,
Hautes-Alpes.



Luminosité brumeuse
au-dessus
d'un Loch écossais.

Gouttelettes

Ces gouttelettes invisibles font penser aux rideaux de pluie, qui semblent continus, alors qu'ils sont constitués de gouttes séparées très rapprochées.

En prenant un tel rideau à grande vitesse, on s'aperçoit que chaque jet est constitué d'un grand nombre de gouttes très proches les unes des autres.

Rideau d'eau tombant d'une fontaine publique d'un quartier de Mexico : Coyoacan, (coyote en espagnol), d'où la statue située sous la douche.



Un jet semblant continu quand il est pris à petite vitesse (à gauche)
devient discontinu à grande vitesse (à droite).



Le rideau d'eau continu provenant du débordement de la fontaine (à gauche) ne l'est pas comme le montre la photographie de droite prise de plus près et à grande vitesse.

La vitesse de prise de vue crée d'étranges ballets entre les gouttes, que l'on croyait solidaires. De même, en s'approchant, les rideaux se dispersent.

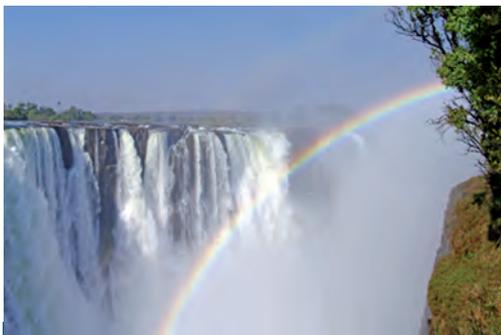
Ces gouttes peuvent également constituer de petites loupes, qui accentuent l'effet du soleil, alors qu'une masse d'eau plus consistante crée une protection. Pas de coup de soleil sous l'eau, le contraire avec quelques gouttes sur le corps !



Jet d'eau d'une fontaine de Mexico. © H.L.

Arc-en-ciel

Ces gouttelettes sont également à l'origine des arcs-en-ciel, qui sont des cercles parfaits mais limités à l'horizon visible. Pour voir un cercle entier, il faut se placer dans le ciel. Dans tous les cas, vous pouvez observer un arc-en-ciel chaque fois que de l'eau est en suspension dans l'air et que le Soleil brille derrière vous. La diffraction de la lumière se fait dans chaque goutte, le résultat est un arc en ciel. Que l'arc soit proche ou éloigné, l'angle sous lequel on le voit est toujours le même, presque 90° . En fait, il s'agit de l'intersection du cône de sommet vous-même, d'axe, la droite vous joignant au soleil et de demi angle au sommet 42° , et d'un plan orthogonal à l'axe. Ce plan est situé au niveau du mur d'eau.



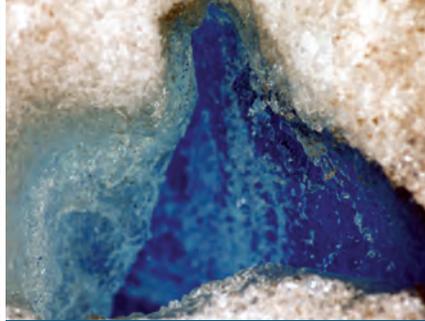
Arc en ciel au-dessus des chutes du Zambèze au Zimbabwe.

La glace

À l'état solide, l'eau est de la glace. Elle peut être plus ou moins translucide, virer au bleu, et prendre des formes étranges. La glace comme l'eau absorbe les grandes longueurs d'onde de manière préférentielle et ne restitue que les courtes, où le bleu est majoritaire...d'où la couleur de l'eau si elle est assez profonde. Pour la glace, cela se voit essentiellement dans les cassures et non en surface, où elle est généralement recouverte d'une fine couche de poussière qui lui donne sa couleur blanche.



Le front du glacier des flétans au Groenland. On voit les différences de coloration que peut prendre la glace, du blanc au bleu foncé.



Détail du glacier des flétans qui montre l'intensité du bleu de la glace sous-jacente.

Forme des glaçons

Quand la glace se détache du glacier, elle se dépose à marée haute sur la plage, où elle fond. Elle prend alors des formes étranges, que la luminosité particulière du nord accentue.



Les cascades de glace des Alpes ont des aspects intéressants.



Glaçon fondant sous la pluie, sur une plage du Groenland.



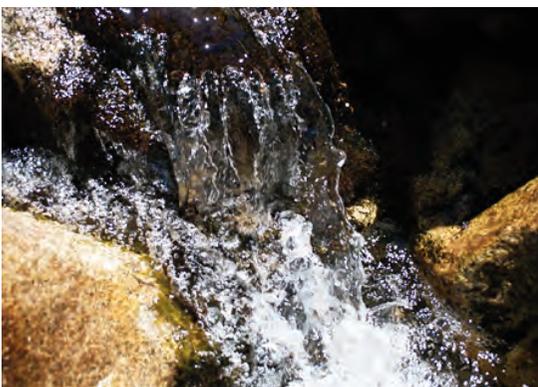
Les glaçons fondant doucement sur la plage forment d'étonnantes sculptures.

Eaux vives

Les mouvements de l'eau sont plus difficiles à visualiser. Selon que la photographie se fait à basse ou grande vitesse, les effets sont très différents et le mouvement y apparaît autrement. C'est la technique que nous recommandons pour photographier les vagues, les tourbillons et les cascades.



Tourbillons pris à basse vitesse. Le mouvement apparaît mais est lissé. En les prenant à grande vitesse, nous le solidifions et retrouvons les effets de la glace.



En prenant les tourbillons à grande vitesse, nous solidifions les mouvements et retrouvons les effets de la glace.



Eau de torrent corse pris à grande vitesse, l'effet ressemble à celui de la glace.

Une expérience intéressante peut être d'observer à grande vitesse un glaçon tombant dans un verre d'eau et les trajectoires des gouttes.

Neige

La neige est constituée de petits cristaux de glace agglomérés de manière plus ou moins dense. Quand la température est proche de zéro, nous observons une neige lourde.

Si le froid est plus intense, la neige se rapproche de la glace et donne des formes ciselées plus cristallines.



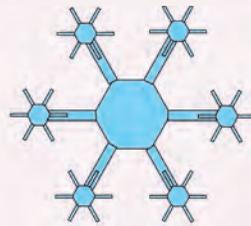
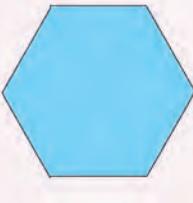
Mimosa sous la neige
à Toulon,
à une température de 2° .



Arbre sous la neige
dans le Vercors,
à une température de -20° .

Des hexagones dans l'air

Les cristaux de neige prennent des formes variées selon la température, mais systématiquement hexagonales. Les plus simples sont celles des hexagones convexe et étoilé classiques.



Deux des dix formes reconnues des cristaux de glace : en plaquette (à gauche) et en étoilé (à droite).

Réflexion sur l'eau

Le mathématicien pensera aussi aux propriétés réfléchissantes de l'eau, qui permettent des symétries surprenantes.



Réflexions
sous le pont neuf
à Albi.



Réflexions de colverts
sur le lac de Garde :
une mince pellicule d'eau
suffit pour assurer cet effet.

Pollution

Dans un autre sens, l'eau polluée est une source de réflexions. Heureusement, il est possible de purifier l'eau mais c'est l'un des problèmes majeurs auquel l'humanité est confrontée.

H.L.



Traitement de l'eau polluée.



L'eau polluée donne des reflets
intéressants à l'usine Véolia
de Sanary.

Le moulin et le papillon

Étienne Ghys et Jos Leys



Edward Lorenz (1917-2008) n'était ni mathématicien, ni informaticien, ni physicien, ni météorologue, mais il était tout cela à la fois : un grand scientifique qui a laissé beaucoup de travail pour toutes ces professions. Il a même inventé un moulin à eau pour expliquer clairement ses idées sur le chaos...

Dans les années 1960-1970, il met en évidence *l'effet papillon* qui est devenu célèbre, même à l'extérieur du monde scientifique. Il n'était pas le premier à introduire le concept de *dépendance sensible aux conditions initiales*, ou de chaos. Mais ces idées restaient théoriques et on n'imaginait pas qu'elles pourraient avoir des répercussions dans la vie de tous les jours, comme par exemple sur le temps qu'il fera demain.

L'article de Lorenz *Deterministic non periodic flow*, datant de 1963, reste un modèle. Sa première approche est celle du mathématicien face à un problème qu'il ne sait pas résoudre : il change de problème pour en choisir un plus simple, sur lequel il a quelque chose à dire... Les équations complexes qui gouvernent le mouvement de l'atmosphère sont trop compliquées ? Elles dépendent d'un trop grand nombre de variables ? Qu'à cela ne tienne ! Il écrit *une autre équation*, bien plus simple, qui ne dépend que de *trois* variables, et qui ressemble, *vaguement*, à l'équation initiale (qui, elle, dépend d'une infinité de variables). Puis, il analyse cette équation simplifiée, cette fois comme un *numéricien*. Il utilise les ordinateurs primitifs dont il dispose pour observer à quoi ressemblent les solutions. Il ne s'agit pas de théorèmes mathématiques mais seulement de *constatations numériques expérimentales*. Ensuite, il se comporte comme un physicien qui revient sur le problème initial et se demande si ses observations numériques de ces équations simplifiées ont quelque chose à voir avec le problème initial : l'atmosphère. Il ne s'engage pas, il suscite des questions, suggère des expériences à venir etc.

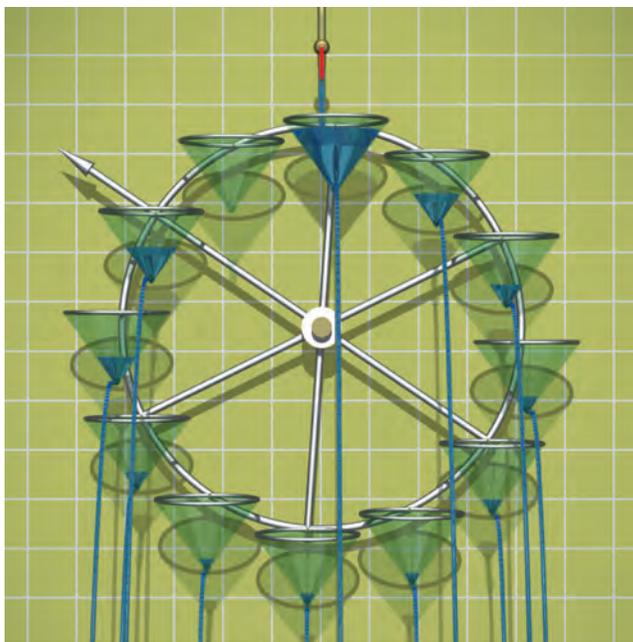
Les mathématiciens ont eu beaucoup de mal à placer les questions de Lorenz dans un contexte mathématique, mais ils y parviennent peu à peu.

On résume en général l'effet papillon par le titre d'une conférence de Lorenz : *Le battement des ailes d'un papillon au Brésil peut-il provoquer un ouragan au Texas ?*. On parle de dépendance sensible aux conditions initiales : une petite modification sur les conditions initiales d'un mouvement peut engendrer de grandes modifications quelque temps plus tard. Il ne faudrait pas se limiter à cela. Comment un scientifique pourrait-il se contenter d'une idée qui postule l'impossibilité de prédire l'avenir dans la pratique puisque cet avenir dépend d'une connaissance extrêmement précise du présent, au delà de ce qu'on peut espérer raisonnablement ? Le travail du scientifique, comme par exemple un météorologue, est souvent de faire des *prédictions*. Si on part du principe qu'elles sont impossibles, il ne reste plus grand-chose à faire...

Lorenz et son moulin à eau chaotique

Nous allons décrire un objet imaginé par Lorenz et deux collègues physiciens. Ils ont eu l'idée de concevoir un système physique bien plus simple, un *moulin à eau*, qui obéit à ces équations simplifiées. Les conclusions physiques de Lorenz, même si elles sont douteuses pour la météorologie, sont alors de vraies conclusions physiques pour ce moulin, certes plus modeste mais quand même bien concret... Un physicien aime les *vraies expériences*.

Voici un moulin. Il est constitué d'une roue autour de laquelle sont suspendus des seaux d'eau. Bien sûr, les seaux sont percés au fond, et



l'eau s'écoule, d'autant plus vite que le niveau est élevé. Tout en haut, on ouvre un robinet et on observe le mouvement.

Le moulin
de Lorenz

Le moulin ne semble pas capable de trouver son régime permanent. Il tourne tantôt à droite, tantôt à gauche et nous laisse totalement incapables de prévoir dans quel sens il tournera trois secondes plus tard.

Le mouvement paraît totalement erratique, imprévisible, chaotique pour employer le mot approprié... Que se passe-t-il ? La première chose est que le mouvement n'est pas *périodique* : cela saute aux yeux. Plus sérieusement, le mouvement semble *aléatoire*. Mais que pourrait signifier ce mot dans ce contexte puisque le mouvement est parfaitement *déterministe* : la physique ne joue pas aux dés avec le mouvement ; elle suit des équations bien précises et si l'on connaît la position et la vitesse à un instant donné, on peut en déduire mathématiquement la position et la vitesse à n'importe quel moment futur. Le problème est qu'il faut interpréter le mot *connaît* dans la phrase précédente dans un sens mathématique et pas physique : un mathématicien connaît un nombre quand il en connaît *toutes* les décimales et ce n'est jamais le cas d'un physicien qui fait ce qu'il peut avec ses mesures et ne peut considérer comme connues qu'un certain nombre de décimales. Le physicien ne pourra *jamais* s'affranchir d'une certaine incertitude dans ses mesures.

Changeons imperceptiblement la position initiale. On observe bien la *dépendance sensible aux conditions initiales* : au début les deux moulins semblent se mouvoir de la même manière et après quelque temps, les choses changent de manière très significative. Au point que les deux moulins semblent ne plus rien avoir à voir entre eux. C'est la première partie du message de Lorenz. Si l'on ne connaît qu'approximativement la condition initiale, il est bien possible qu'on ne puisse absolument rien dire sur le futur du mouvement. Beaucoup ont résumé la contribution de Lorenz à cette affirmation, certes intéressante mais limitée. Si on ne peut pas prédire l'avenir, que va-t-on faire ?

Des probabilités et des statistiques dans un contexte déterministe ?

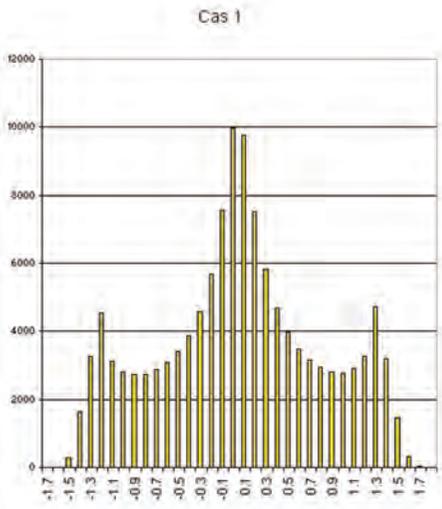
Lorsqu'on n'a pas de certitude sur l'avenir, on parle de probabilités... Prenons notre moulin et faisons le tourner. Supposons qu'on l'observe par exemple 25 fois par seconde (comme au cinéma), pendant 5 000 secondes, donc 125 000 observations. À chaque observation, notons la vitesse de rotation de la roue (positive si la roue tourne dans un sens et négative si elle tourne dans l'autre). Nous obtenons donc une longue liste de 125 000 nombres que nous épargnerons au lecteur. On peut penser à la liste des mesures météorologiques dont on dispose depuis très longtemps.

Y aurait-il un sens à dire que cette suite est *aléatoire* ? Une idée très simple est de faire ce que font les statisticiens : un diagramme en bâtons pour illustrer la distribution. Nous avons découpé l'intervalle allant de -1,8 à +1,8 en 35 intervalles de même longueur et nous avons comp-

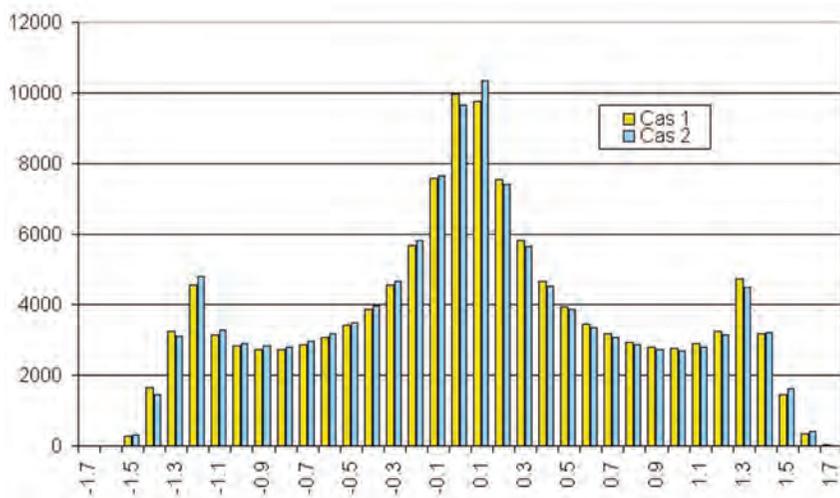
té le nombre de fois où la mesure de la vitesse donnait un résultat dans chacun de ces intervalles. Voici le résultat. Certains des intervalles semblent plus visités que d'autres.

L'idée principale de Lorenz, bien plus novatrice que celle de la dépendance sensible aux conditions initiales, est que l'aléa du mouvement, qui est bien réel, est insensible aux conditions initiales. Expliquons cela. Prenons le même moulin, modifions très légèrement les conditions initiales comme nous l'avons fait précédemment, et observons à nouveau la roue 25 fois par seconde, en notant sa vitesse de rotation.

On obtient une autre longue suite de données, bien différente de la première puisqu'il y a dépendance sensible aux conditions initiales. Mais l'observation est que les deux suites de données, bien que différentes, sont statistiquement identiques.



Dessignons le nouveau diagramme en bâtons correspondant à cette nouvelle condition initiale en le plaçant à côté du premier.



Les diagrammes sont différents mais ils se ressemblent beaucoup. On pourrait demander à un statisticien s'il lui semble raisonnable que les deux diagrammes puissent être considérés comme deux échantillons d'une même population ? Là encore, il faut nous faire confiance : en effet, tous les tests statistiques montrent que les différences entre les deux diagrammes peuvent sans problème s'expliquer par les probabilités. Si on avait pris un échantillon encore plus grand, les différences entre ces fréquences seraient plus faibles. Et bien sûr, la même chose serait vraie si on mesurait autre chose que la vitesse de rotation.

Que serait l'analogie d'un ouragan dans le contexte de notre moulin ? C'est une circonstance particulière, heureusement rare, où certaines circonstances précises se présentent. Les auteurs ne connaissent rien en météorologie, mais ils peuvent imaginer qu'un ouragan est peut-être la conjonction de certaines pressions atmosphériques, températures, vitesse du vent etc. En termes de moulin, peut-être qu'un ouragan correspondrait à une valeur extrême de la vitesse de rotation du moulin, disons supérieure à une certaine valeur, disons par exemple 1,7 avec notre roue ; une circonstance très rare. Ce que nous venons de voir, c'est que si on change très peu la condition initiale, la liste des valeurs des vitesses sera très différente, mais sur de très longues périodes, la fréquence d'apparition de ces conditions extrêmes ne change pas. Le nombre moyen de jours d'ouragans par an, ou par décennie par exemple, est insensible aux conditions initiales. Il devient possible pour le physicien de faire des prévisions, météorologiques par exemple, mais ces prévisions seront d'une nature très différente.

Des théorèmes ?

Jusqu'à présent, nous n'avons mentionné cette *insensibilité statistique aux conditions initiales* que comme une intuition de Lorenz. Peut-on démontrer que c'est effectivement le cas dans les systèmes dynamiques que l'on rencontre dans la nature ? C'est en grande partie un défi lancé aux mathématiciens contemporains et de grands progrès ont été réalisés récemment.

Pour de grands systèmes tels que l'atmosphère, qui intéressaient initialement Lorenz, il faut bien reconnaître que les progrès mathématiques sont lents. Il n'est pas clair que le mouvement de l'atmosphère est sensible aux conditions initiales, et la question de l'insensibilité statistique semble encore plus hors de portée pour l'instant. Par contre, pour des systèmes plus *raisonnables* dépendant de beaucoup moins de paramètres, comme par exemple l'équation que Lorenz a lui-même rencontrée en trois variables, les progrès ont été importants dans les années récentes. On peut citer par exemple le travail de Tucker qui démontre mathématiquement que l'équation de Lorenz à trois variables est effecti-

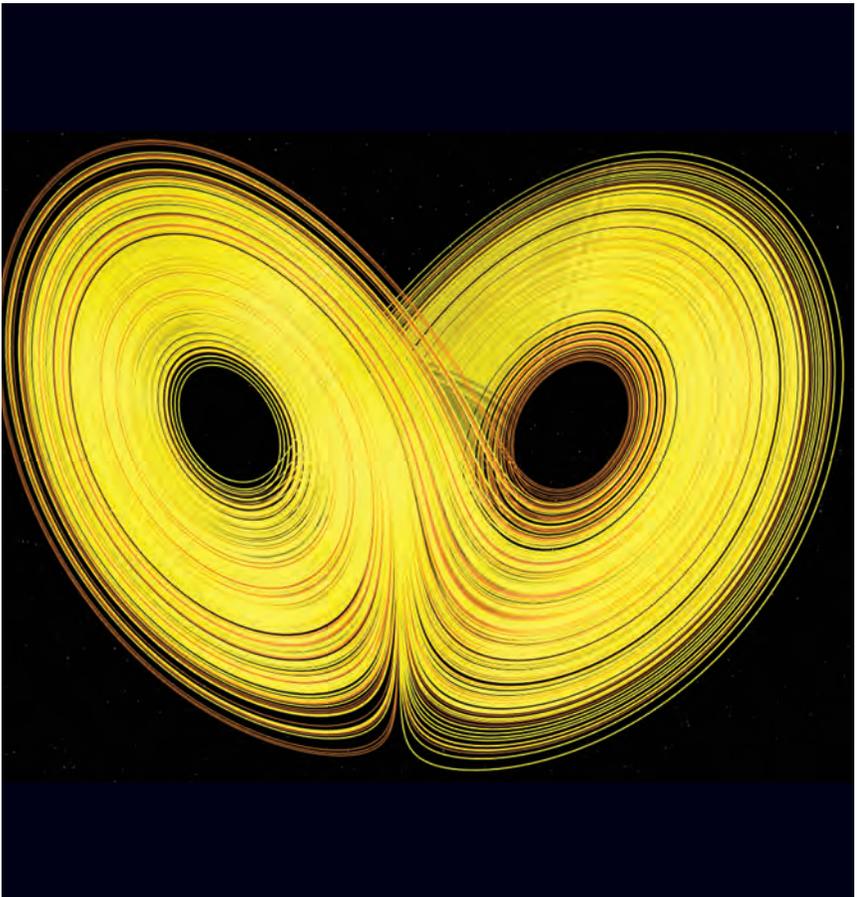
vement insensible statistiquement aux conditions initiales (les auteurs parlent de l'existence de mesure de Sinai-Ruelle-Bowen pour énoncer cette propriété). Mais il reste beaucoup à faire sur le plan mathématique.

Espérons avoir rendu justice à Lorenz qui ne s'est pas contenté de dire que le futur dépend fortement du présent. Beaucoup l'avaient dit avant lui, ou au moins le savaient très bien sans ressentir le besoin de le dire...

Mais sa contribution est aussi, et peut-être surtout, de montrer qu'en recentrant ses ambitions autour de questions statistiques, même dans un système déterministe, on peut préserver un caractère prédictif à la science.

Un papillon pour terminer

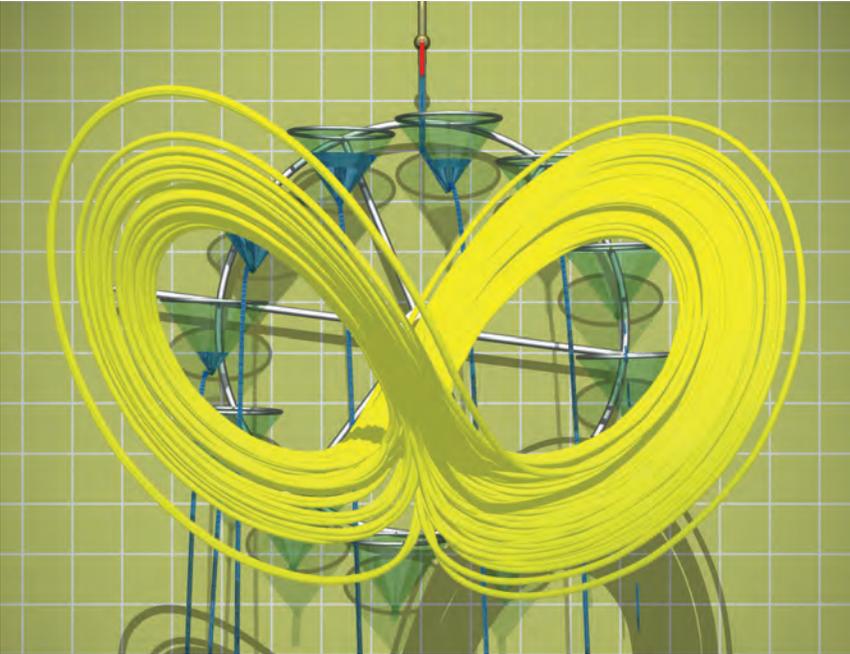
L'équation simplifiée de Lorenz a une autre propriété : elle est belle. Si l'on trace ses solutions dans l'espace, on voit apparaître un très bel objet appelé *attracteur de Lorenz* qui est devenu l'un des symboles les plus célèbres de la théorie des fractales et du chaos. En voici une image :



Il est bien clair que la ressemblance avec un papillon ne fait que renforcer la force symbolique de l'effet *papillon*.

Le moulin de Lorenz a été conçu pour être un phénomène réel qui illustre l'effet papillon. Pour décrire dans ses grandes lignes le moulin à un instant donné, nous avons choisi trois nombres. Leur définition importe peu. Lorsque le moulin tourne, on peut donc dessiner dans l'espace la courbe décrite par ces trois nombres.

Voici ce qu'on obtient :



Le moulin est donc un papillon !

E.G et J.L.

Pour en savoir plus :

Cet article est extrait d'un article des mêmes auteurs sur Images des Mathématiques :
<http://images.math.cnrs.fr>

Le film *Chaos, une aventure mathématique* par Jos Leys, Étienne Ghys et Aurélien Alvarez contient beaucoup plus d'informations (et d'images). Il peut être consulté (et téléchargé) sur <http://www.chaos-math.org/fr>

Sornettes sur la planète

Hervé Lehning



Les scientifiques essayent d'expliquer le monde dans lequel ils vivent, en utilisant, au mieux qu'ils peuvent, leurs connaissances, fondées sur l'observation. Cela n'a pas été toujours sans difficultés, erreurs et tâtonnements en fonction des savoirs du moment. Ainsi en a-t-il été de la forme de la Terre ou de sa position et de son mouvement dans le Système Solaire.

Aux époques où l'érudition et le savoir en général, étaient, dans chaque pays, détenus par les autorités religieuses, les débats se sont souvent enlisés dans des joutes stériles entre rationnel et irrationnel. Les religions se sont, en général, construites sur des écrits d'époques reculées ou l'emploi de la métaphore était courante. Ainsi l'affirmation que l'on trouve au chapitre V de l'évangile de Matthieu : *Vous êtes le sel de la Terre* n'indique pas que les disciples de Jésus étaient faits en sel et non en chair et en os ! Il en est de même des *quatre coins de la Terre* !

Ces époques lointaines devraient être révolues car si la fabrication du savoir est entre les mains de scientifiques de plus en plus performants, la connaissance que l'on a de ce savoir est maintenant l'affaire de chacun, de sa propre culture et de son accès à l'information. Quelques cas resteront cependant irréductibles : en 1999, année de l'éclipse totale de Soleil en France, j'ai été pris à parti un jour dans un café, par un consommateur qui se fiant à sa propre vision quotidienne du Soleil, croyait encore et doit croire toujours que celui-ci tourne autour de la Terre.

Mais, hélas, la crédulité des uns fait le bonheur des autres.

La Terre est ronde ?

Les peuples de marins peuvent difficilement ignorer que la Terre est ronde. Même par ciel dégagé, les bateaux disparaissent graduellement derrière l'horizon. Ceci ne s'expliquerait pas si la Terre était plate. En revanche, si elle est sphérique, c'est logique.



Photographie de la Terre prise de l'espace.

© nasa

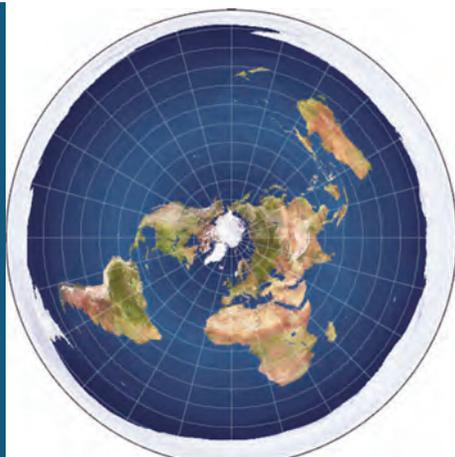
De nos jours, nous disposons de preuves qui semblent incontournables : les photographies prises de l'espace.

La Terre est plate !

Pour certains, cela prouve simplement l'existence d'un complot international pour faire croire que la Terre est ronde ! L'obscurantisme a toujours fait recette à travers les siècles. D'autres sont des personnes cultivant un sens de l'humour atypique. Ainsi, on peut lire sur internet, plaisanterie ou délire ?

La Terre est plate, elle a la forme d'un disque avec, au centre, le Pôle Nord et les continents groupés autour de lui sauf l'Antarctique qui correspond en fait à la circonférence du disque. Personne n'est jamais tombé du disque car personne n'a jamais pu traverser l'Antarctique...

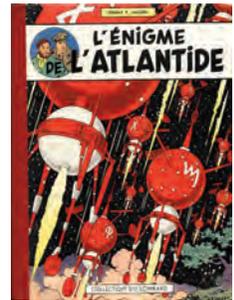
La Terre plate avec le pôle nord en son centre et le pôle sud comme montagne frontière empêchant les océans de se déverser à l'extérieur.



Au XIX^e siècle, un ingénieur anglais et original, Samuel Rowbotham (1816 – 1864) décida de réaliser des expériences pour savoir si la Terre était ronde ou plate. L'idée était de vérifier, en utilisant un télescope, si une rivière, la Bedford, en l'occurrence, s'incurvait ou pas. Si la Terre est bien ronde, on ne peut voir un bateau plat sur une rivière à plus de cinq kilomètres... or Rowbotham réussit à en voir un à plus de dix kilomètres ! Preuve que la Terre est plate ? Non, mais l'expérience était troublante... En fait, elle s'explique par la réfraction de la lumière, le phénomène à l'origine des mirages dans le désert. Même si notre ingénieur était animé d'un esprit malicieux, sa démarche était sans contexte de nature scientifique. Et son résultat, a priori curieux, une fois toutes les explications données, ne fait que raffermir la théorie selon laquelle la Terre est ronde.

La Terre est creuse !

L'existence de vastes cavernes souterraines est une évidence. Tous les spéléologues peuvent en témoigner. Les théories selon lesquelles certaines seraient occupées par des animaux fantastiques ou des civilisations intra-terrestres sont plus hasardeuses. C'est parfait quand elles ne sont que l'occasion d'œuvres littéraires fantastiques, comme chez Jules Verne et son *Voyage au centre de la Terre* et chez Edgar Jacobs et *L'énigme de l'Atlantide*.



C'est beaucoup plus ennuyeux quand certains commencent à croire à une Terre réellement creuse et habitée à l'intérieur. Au XVII^e siècle, l'astronome Edmund Halley, celui qui prédit correctement le retour de la comète qui depuis porte son nom, a envisagé une Terre creuse faite de plusieurs coquilles séparées par des atmosphères. Son but était d'expliquer des anomalies dans le champ magnétique. L'hypothèse d'une atmosphère lumineuse à l'intérieur de la Terre expliquait de plus les aurores boréales en s'échappant vers l'extérieur... d'où l'hypothèse d'entrées au niveau des pôles. Halley alla jusqu'à émettre l'hypothèse que ces trois mondes intérieurs pouvaient être habités.

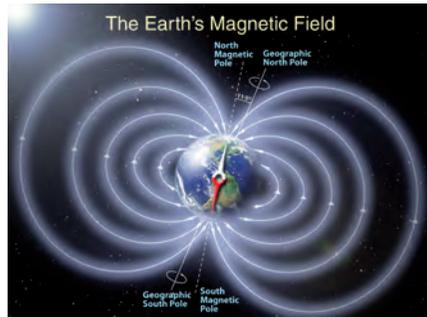


Planète creuse
selon Sir Edmund Halley.

Cette hypothèse n'a pas convaincu ses collègues scientifiques de l'époque... mais plaît davantage à toutes sortes d'ésotériques modernes. Certains voient même un soleil intérieur et des habitants vivants dans un monde concave, donc les pieds en l'air, ce miracle ayant lieu grâce à la force centrifuge. Bien entendu, la physique nous apprend que c'est impossible !

L'annulation du champ magnétique

Le champ magnétique terrestre s'inverse avec une période fluctuant entre quelques milliers et quelques millions d'années, c'est-à-dire que le pôle nord magnétique est parfois au pôle nord géographique, parfois au pôle sud. La polarité des roches magmatiques, qui dépend du champ magnétique à l'époque de leur solidification, montre que celui-ci s'est inversé plusieurs fois. Que se passe-t-il entre ces deux phases ? Si un champ passe de la valeur -1 à la valeur $+1$ de manière continue, il semble clair qu'il doit passer par 0 entre les deux. Quand le champ est annulé, le pire devient probable sinon certain, car le magnétisme terrestre est une protection contre les bombardements cosmiques ! On ne peut cependant pas attribuer les principales extinctions de masse (celle du Permien, celle des Dinosaures ou celle des Mammouths) à une inversion du champ magnétique terrestre, comme certains l'ont proposé, car les dates ne correspondent pas ! De plus, un champ continu sur une sphère peut s'inverser sans jamais s'annuler. Il s'agit d'un résultat mathématique. En revanche, il est exact qu'une valeur réelle continue ne peut changer de signe sans s'annuler. Le danger de l'annulation du champ magnétique terrestre est un mythe.



La Terre, être vivant !

En 1979, un chimiste, James Lovelock, puisant dans la mythologie, assimila la Terre à un organisme vivant, qu'il nomma Gaïa, du nom de la déesse grecque qui personnifie notre planète. En fait, son idée personnelle n'était pas aussi radicale. Il voyait plutôt l'atmosphère terrestre comme un système autorégulé, pas comme un être vivant.

Malheureusement, comme on pouvait s'y attendre, cette idée a susci-



Le souffle de Gaïa
par Josephine Wall

té un bon nombre de dérives mystiques aussi dangereuses qu'inconséquentes, évoquant de véritables massacres, pour réguler notre éco-système. Nous voyons les dangers d'une déification de notre planète !

Respecter notre environnement est une chose, sacrifier l'humanité à une soi-disant déesse en est une autre.

Si le fragile vaisseau Terre doit être préservé, c'est essentiellement pour offrir à l'humanité, qui y vit, la meilleure chance de se développer.

H.L.



Lever du jour depuis la navette spatiale

© nasa

Géométrie Fractale et Phénomènes Naturels

Jean-François COLONNA
Centre de Mathématiques APpliquées
Ecole Polytechnique

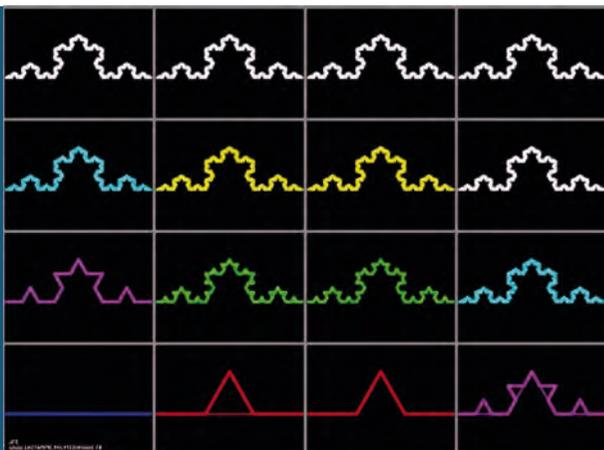


En 1960, Eugène Wigner s'interrogeait sur la redoutable efficacité des Mathématiques en Physique. Malgré ces succès, des *choses* bien quotidiennes échappaient à une description en terme de Mathématiques *classiques* : quelle est en effet la forme d'un nuage, d'une montagne ou encore des ramifications des bronches en terme d'*atomes* euclidiens ?

De Euclide à Mandelbrot

Or à la fin du dix-neuvième siècle, des mathématiciens (Weierstrass, Cantor, Peano, Lebesgue, Hausdorff, Besicovitch, von Koch, Sierpinski,...) s'intéressèrent à des *monstres* et en particulier à des courbes continues n'ayant de tangente en aucun point... Ces courbes sont définies comme étant la limite d'un certain processus itératif de construction et ne sont donc jamais visualisables exactement, mais seulement de façon approchée. L'exemple le plus simple est celui de la *courbe de von Koch*. La Figure 1 présente les trois premières itérations de sa construction : partant d'un segment (bleu en bas et à gauche), son tiers central est remplacé par les deux côtés supérieurs d'un triangle équilatéral ; cette procédure est ensuite répétée pour chacun des 4 segments plus petits (dans un rapport égal à 3) obtenus, etc.

Figure 1
La courbe
de von Koch.



Il est évident qu'à chaque itération la longueur totale est multipliée par $4/3$, ce qui fait que, par exemple, en quatre-vingt dix itérations, partant d'un segment d'un mètre, la longueur obtenue (175×10^6 km) est supérieure à la distance de la Terre au Soleil ! Cela met en évidence une première propriété : un objet fractal permet au *fini* (ici, le domaine de définition de cette courbe) et à l'*infini* (sa longueur) de coexister. Une seconde propriété, parfaitement visible, est celle d'*autosimilarité*. Elle indique que les parties sont identiques au tout, à un facteur d'échelle près et il s'agit là d'une propriété possédée par de très nombreux objets naturels : un nuage, une montagne, une branche de fougère,...

Nous n'insisterons pas sur la délicate notion de dimension dite *fractale* en général non entière. Notons seulement qu'elle est, pour les objets fractals, une mesure de leur *rugosité*, de leur irrégularité et de leur *taux* d'occupation de l'espace dans lequel ils existent.

Ces monstres restèrent assoupis plusieurs dizaines années jusqu'à ce que la curiosité, l'intuition et le génie de *Benoît Mandelbrot*, aidé par les progrès étonnants des technologies informatiques, les réveillent dans les années soixante/soixante-dix.

L'Universalité de la Géométrie Fractale

Pourquoi tant d'objets naturels sont-ils fractals ? L'examen d'un exemple particulier, celui de la structure des alvéoles pulmonaires (Figure 2), peut nous fournir une réponse possible. En effet, cet organe situé à l'extrémité de l'arbre bronchique (lui-même fractal) est destiné à assurer des échanges gazeux à travers une surface dont l'aire doit être la plus grande possible, alors que son volume est limité. Si la géométrie utilisée était celle d'une sphère, pour augmenter l'aire il conviendrait d'augmen-

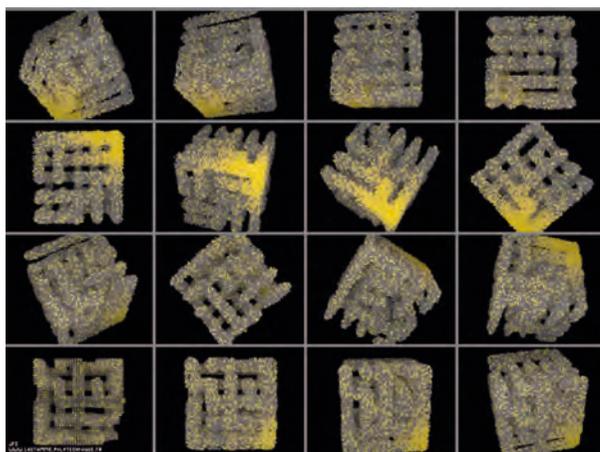


Figure 2

Diffusion de particules à l'intérieur des alvéoles pulmonaires humaines (modèle géométrique dû à Hiroko Kitaoka).

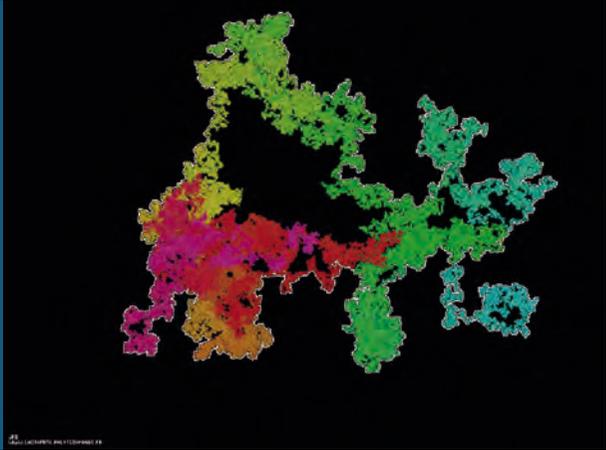
ter le rayon (notons que chez l'adulte la surface d'échange est de l'ordre de 100 mètres carrés, ce qui correspondrait à une sphère de 5,6 mètres de diamètre !).

Une structure fractale est donc la réponse à ce problème d'optimisation.

La géométrie fractale est rapidement devenue un outil mathématique fondamental en réussissant à réunir des domaines jusqu'alors disjoints.

Figure 3

Le mouvement brownien.



Les cours de la bourse, le mouvement brownien (Figure 3), le chaos déterministe, les feux de forêts, les fronts de diffusion (Figure 4),

Figure 4

Le front de diffusion (jaune) de particules (vertes) soumises à une marche aléatoire dans un milieu initialement vide (bleu). L'amas rouge peut se connecter au front par le simple saut de la particule blanche

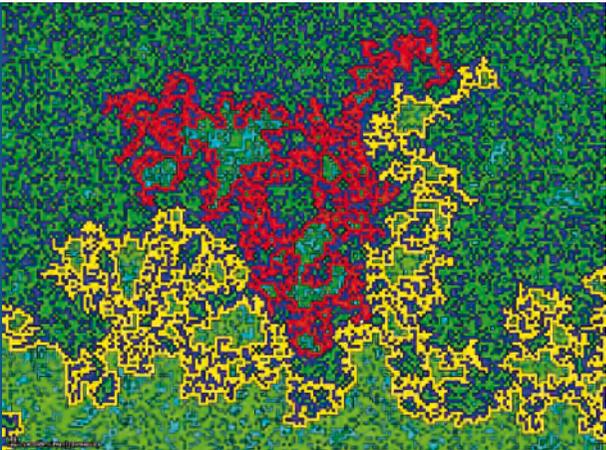




Figure 5

L'érosion des côtes
d'une île d'après
le modèle de
Bernard Sapoval,
Andrea Baldassarri
et Andrea Gabrielli.

l'é-

rosion des côtes (figure 5),... autant de domaines de recherche (fondamentale ou appliquée) où elle s'est imposée. La Science elle-même, avec les structures sans fin qu'elle nous dévoile, ne serait-elle pas l'ultime objet fractal ?

Géométrie fractale et synthèse de phénomènes naturels (nuages, montagnes,...) :

Remarquons que la première itération de la construction de la courbe de von Koch ressemble de façon très grossière et trop parfaite à une ligne de crête. En introduisant un peu d'aléatoire, cette courbe pourra prendre une forme moins régulière et donc plus naturelle ; elle sera alors qualifiée de fractale non déterministe. L'auteur de ce texte a généralisé cette procédure à des espaces à N dimensions ; cela permet, par exemple, pour $N=3$ de produire des paysages extrêmement variés (Figure 6)

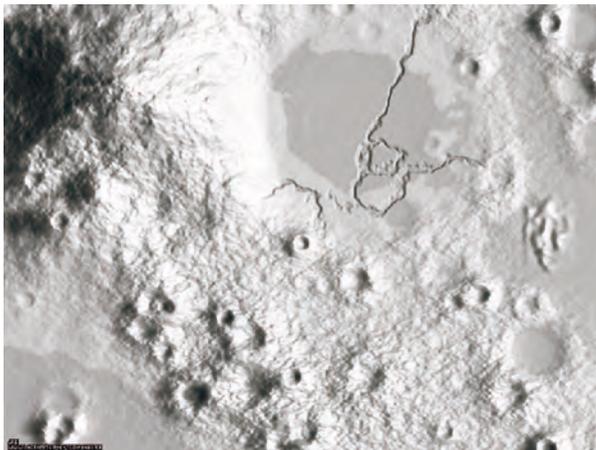
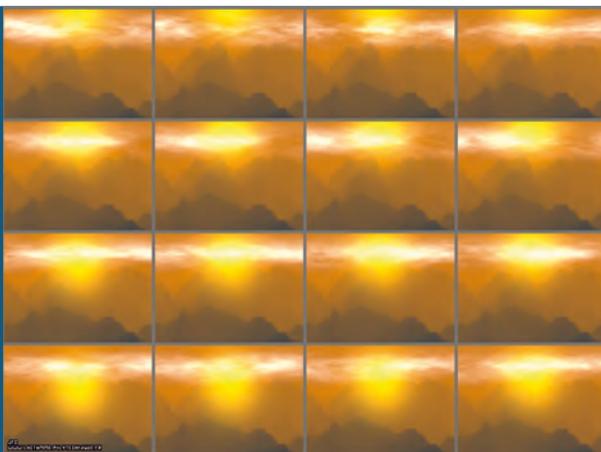


Figure 6

Simulation
de la surface lunaire.

Figure 7
Simulation
d'un lever du Soleil.



et pour $N=4$, de les animer (Figure 7).

Il convient de noter que la simplicité conceptuelle de cet algorithme (et de ceux qui permettent de calculer les ensembles dits de Julia et de Mandelbrot, par exemple) est pratiquement en contradiction avec l'infinie richesse visuelle des structures obtenues. Ainsi, la géométrie fractale nous donne l'occasion de rappeler que du *simple peut naître le complexe*.

Ordinateur et géométrie fractale

Le rôle joué par l'ordinateur fut décisif dans ces progrès. Or la géométrie fractale nous a montré que renoncer parfois à la différentiabilité pouvait s'avérer être une idée fructueuse. Qu'en est-il de la continuité ? L'ordinateur, de par sa structure même, nous contraint à y renoncer bien involontairement. Mais évidemment il ne s'agit pas ici, du moins pas encore, de la continuité de la nature, mais bien de celle des modèles ! Les nombres réels, essentiels à la Physique, sont impossibles à représenter dans nos calculateurs, machines *discrètes* par définition et très facilement cela peut conduire à des résultats faux.

Géométrie fractale et art

La géométrie fractale est connue du public par les images qu'elle permet de produire et qui font dire bien souvent qu'elle est un pont entre l'Art et la Science. Mais alors, l'œuvre ce n'est plus l'image : c'est le modèle mathématique, introduisant ainsi le concept *borgésien* d'œuvre potentielle (c'est-à-dire contenant en elle une quasi-infinité d'œuvres du même type, prêtes à émerger du néant)...

J.F. C.

www.lactamme.polytechnique.fr

L'arpenteur géomètre d'hier à aujourd'hui

Stéphane Jouffrais

Arpenteur géomètre

www.larpenteur.fr/



La géométrie, comme sans doute une grande partie des mathématiques, est née de notre planète. Avec la géométrie, science de la mesure de la Terre, se sont développés le calcul et même le calcul algébrique. Les premiers calculs ont tous pour objet la mesure des surfaces, de parcelles, de pourtours, de partages.

L'homme devenu sédentaire, veut mesurer son territoire

On pense généralement que l'arpentage est né en Mésopotamie, il y a plus de quatre mille ans, sur les bords de l'Euphrate. On trouve des relevés de terrains représentant des parcelles frontières sur des tablettes sumériennes (XIV^e-XIII^e av JC) aux côtés de traités de mathématiques et de tracés géométriques. Le stylet, la règle graduée, la corde à nœuds, sont les outils de base de l'arpenteur qui grave sur ses tablettes d'argile des plans, réductions de l'ouvrage à construire. Il connaît les propriétés de l'homothétie et des techniques de constructions géométriques.



Tablette à écriture cunéiforme présentant un contrat de vente d'un champ.

Musée du Louvre © Raphaël Chipault

L'homme, devenu propriétaire, prend possession de sa cité et entreprend de grands travaux d'urbanisme et d'architecture

Il faut des routes, des aqueducs pour amener l'eau, des tunnels ... Le Tunnel de Samos est un exploit technologique de l'antiquité grecque. Au sixième siècle avant Jésus Christ, un tunnel de 1036 mètres fut creusé à la main dans une montagne sur l'île grecque de Samos. L'historien grec Hérodote considérait ce tunnel comme une des trois réalisations techniques majeures de l'antiquité. Ce tunnel est très intéressant au niveau



Tunnel d'Eupalinos dans l'île grecque de Samos © T.E.Rihll

mathématique car il fut creusé par deux équipes travaillant simultanément des deux côtés de la montagne. Cela pose la question mathématique et la gageure intellectuelle suivante :

Quelle méthode fut employée pour trouver la direction correcte pour le creusement ?

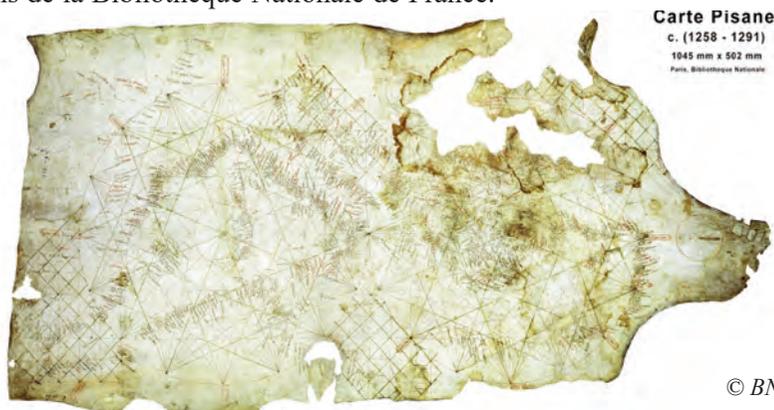
Plusieurs méthodes ont été évoquées. La première fut proposée par Héron d'Alexandrie cinq siècles après la fin du percement du tunnel. En 1950, des historiens des sciences mirent cette explication en doute. L'équipe du projet *Mathematics* a visité le tunnel en 1993, elle a filmé les lieux et en étudiant la disposition du paysage, elle propose une combinaison des deux explications. On peut retrouver cette étude sur leur site.

L'homme, devenu citoyen, part à la conquête d'autres horizons

Pour le guider, il lui faut des cartes. Les premières seront des cartes de proximité, les *portulans*. De l'italien *portolano*, les *cartes portulans* donnent la succession des ports et des havres le long des côtes, tandis que l'espace maritime est sillonné par des lignes géométriques (lignes de rhumb) qui correspondent aux directions de la boussole.

Ce système graphique permettait aux marins de s'orienter en reportant sur la carte la distance qu'ils estimaient avoir parcourue.

Le plus ancien portulan occidental connu daterait de la fin du XIII^e siècle : c'est la *carte pisane*, conservée au département des Cartes et plans de la Bibliothèque Nationale de France.

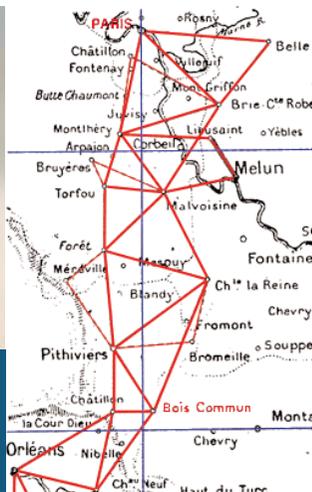


Le plus vieux portulan connu dessiné sur un parchemin : la carte pisane conservée au département des Cartes et plans de la Bibliothèque Nationale de France.

Le XVIII^e siècle marque un tournant décisif dans le développement de la topographie et de la cartographie

La révolution française et son souci d'universalité va entreprendre une expédition scientifique de la première importance : mesurer un arc de méridien terrestre pour donner une définition du mètre liée à la Terre, donc indiscutable. Ci-joint un extrait des travaux de Pierre Méchain et de Jean-Baptiste Delambre pour la mesure du méridien, basée sur la triangulation. De ces travaux est né le premier *mètre étalon*, égal à la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre.

Notons qu'à cette époque un méridien était considéré comme un grand cercle imaginaire, et non comme un demi grand cercle, reliant les pôles géographiques.



Le cercle répétiteur du mathématicien Jean-Charles Borda, construit par Etienne Lenoir *Inventaire* © 1995 M. Heller qui permit à P.Méchain et J.B. Delambre d'effectuer leurs relevés. © IGN

Les instruments de mesure devenant de plus en plus précis, le métier du géomètre topographe se diversifie

La *topographie* qui s'occupe de la description des lieux se scinde en deux disciplines :

La *topométrie*, technique d'exécution et d'exploitation des mesures du terrain.

La *topologie*, science des formes et des reliefs.

Quant à la *cartographie* elle est à la fois du domaine de l'*altimétrie* et de la *planimétrie*.

La multitude et la diversité de ces disciplines montrent l'importance pour l'homme de mesurer la Terre pour mieux la connaître.

Les instruments de l'arpenteur géomètre

Grâce aux évolutions des sciences et techniques dans les domaines de l'optique et de la mécanique de précision, les instruments du géomètre topographe vont évoluer pour gagner en précisions et rapidité dans la prise des mesures.

Depuis l'équerre d'arpenteur, le niveau à eau ou le cercle d'alignement, les méthodes de relevé se sont adaptées au matériel.

© Le Compendium/
Albert Balasse
www.leCompendium.com



La maîtrise des lentilles optiques va permettre de réaliser des visées plus précises.

L'invention du *vernier* améliorera les lectures angulaires et la création du *cercle répétiteur*, en augmentant le nombre de mesures, va réduire les erreurs instrumentales.

Plus récemment la mesure de distances par infrarouge ou rayon laser sera une véritable révolution pour le métier.

Aujourd'hui l'utilisation des instruments de topographie s'est simplifiée, et les outils mathématiques nécessaires à la compréhension des manipulations instrumentales ont disparu. Les instruments de topographie sont devenus dépendants de l'électronique et l'informatique.

Avec la dernière génération d'instrument, le *tachéomètre électronique*, le géomètre topographe voit son métier évoluer considérablement. Une carte mémoire permet d'enregistrer, par simple pression sur

un bouton, les angles horizontaux et verticaux avec une précision de l'ordre du décimilligrade ($\text{dmgon} = 10^{-4}$ grade), ainsi qu'une distance pouvant aller jusqu'à plusieurs kilomètres avec ou sans réflecteur avec une précision de quelques millimètres.

Tachéomètre électronique

© Leica



Aujourd'hui : le GPS

Il s'agit d'un système de positionnement et de datation par satellites - GNSS *Global Navigation Satellite System*, système de satellites en orbite avec le GPS pour les Américains, GLONASS pour les Russes, GALILEO ou d'un système avec des satellites géostationnaires pour les Européens, BEIDOU ou COMPASS pour les Chinois, IRNSS pour les Indiens.

Couverture par
Global Navigation Satellite System

L'utilisation du système de positionnement par satellites est devenue un outil indispensable dans le domaine de la topographie, permettant un référencement plus global sur un territoire.



Aujourd'hui les besoins administratifs doivent répondre à des problématiques nationales notamment avec la mise en cohérence des plans entre eux, pour les réseaux électriques, gaz, autoroutiers, ferroviaires

Le positionnement par satellites en utilisant des coordonnées géographiques permet cette unicité, mais aussi crée de nouvelles contraintes liées à la projection de ces coordonnées sur le plan et aux imprécisions dues à ces déformations. Ainsi va le progrès...

S.J.

Temps et Astronomie

Daniel Gambis
Observatoire de Paris



Depuis très longtemps, l'Homme a observé les phénomènes célestes pour déterminer le temps qui passe. Il a pu remarquer le caractère périodique de l'alternance des jours et des nuits, les phases de la Lune ou le mouvement de la Terre autour du Soleil. En particulier, la rotation de la Terre sur elle-même fournit une bonne horloge naturelle qui a pu être utilisée pour régler les activités humaines. Avec le développement des techniques modernes comme le chemin de fer, une plus grande précision et une meilleure cohérence devinrent nécessaires et en 1884, lors de la conférence internationale de Washington, les astronomes adoptèrent comme référence le Temps Universel basé sur la rotation de la Terre ; en même temps on adopta le méridien de Greenwich comme méridien origine ainsi que le système des fuseaux horaires.

Dans les années 1950, l'exigence de meilleures précision et stabilité conduisit à abandonner progressivement le Temps Universel au profit du Temps Atomique International (TAI) basé sur les horloges atomiques. L'échelle de temps légale actuelle est le Temps Universel Coordonné (TUC) qui a les propriétés d'un temps atomique tout en étant couplé à la rotation de la Terre par l'intermédiaire de secondes intercalaires introduites dans TUC. Bien que la communauté scientifique en soit globalement satisfaite, ce système présente des inconvénients liés au fait qu'il ne soit pas continu au moment de l'introduction des secondes intercalaires. Des discussions internationales qui ont lieu depuis une dizaine d'années pourraient aboutir en 2015 à une révision de la définition du temps légal TUC avec la suppression de cette seconde intercalaire.

Cela mènerait alors à découpler le temps légal de la rotation de la Terre.

Le temps solaire, l'équation du temps

La Terre tourne sur elle-même en 24 heures. On voit le Soleil se déplacer d'Est en Ouest au cours de la journée. Le mouvement apparent du Soleil est comme une horloge naturelle dans le ciel. Il est midi lorsque le soleil passe au méridien du lieu. Le jour solaire est la durée entre deux retours successifs du Soleil au méridien local. Pour mesurer le temps, les hommes développèrent tout d'abord des instruments simples comme le gnomon, simple bâton planté en terre, et le cadran solaire.



Cadran solaire marquant les heures vraies solaire.

Pendant longtemps ce mouvement du Soleil suffira pour régler les activités humaines. Par la suite les exigences de précision augmentant, on ne tiendra plus compte des diverses variations et on obtiendra un temps plus uniforme.

On sait maintenant que l'observation du mouvement du Soleil ne donne pas accès à un temps uniforme pour les raisons suivantes :

- d'une part l'orbite de la Terre autour du Soleil n'est pas un cercle mais une ellipse, par suite le mouvement angulaire de la Terre autour du Soleil est plus rapide au périhélie (de décembre à janvier)
- d'autre part l'axe de rotation de la Terre est incliné par rapport au plan de l'écliptique.

Ce phénomène est bien connu : il correspond à *l'équation du temps* et se reproduit d'une année sur l'autre. Notons ici qu'en Astronomie *équation* signifie *correction*. A midi, le Soleil peut avoir une avance ou un retard à son passage au méridien, qui atteint une quinzaine de minutes au cours de l'année. Newton est probablement le premier à s'en être aperçu. Pendant longtemps cette imprécision ne fut pas gênante. On n'était pas à un quart d'heure près pour prendre la diligence !

Si l'on prend en compte l'équation du temps, on accède à un temps plus régulier : le temps solaire dit *moyen*. Ecrit autrement, le jour solaire moyen est basé sur un soleil moyen fictif qui se déplacerait autour de l'équateur à vitesse constante tout au long de l'année. Cette moyenne est de 24 heures.

Notons que cette correction de l'équation du temps figure maintenant sur un bon nombre de cadrans solaires. L'évolution annuelle de l'équation du temps, en un endroit donné, peut être visualisée à l'aide d'une courbe appelée *analemme*.

Analemme du Soleil
au-dessus du porche des Caryatides
de l'Acropole d'Athènes.

C'est une étrange figure que dessine
le Soleil observé tout au long
de l'année. L'opération est complexe.
On superpose les vues du Soleil prises
à midi solaire sur le même morceau
de négatif pour obtenir
cette danse magique...



Pour la petite histoire, les horloges de Paris étaient réglées sur le temps solaire vrai non uniforme jusqu'à la seconde Restauration, en 1815, et il fallait régulièrement les remettre à l'heure à partir de cadrans solaires lorsque ceux-ci marquaient midi. L'utilisation du temps moyen fut à l'ordre du jour à la fin du XVIII^e siècle et il fut introduit à Paris dès 1816. L'heure de Paris définie par le temps civil de Paris devint le temps légal français en 1891. Il fut défini, comme étant le temps moyen de Paris augmenté de 12 heures, ce qui était plus pratique pour les citoyens dans leur vie de tous les jours. L'heure de Paris satisfaisait principalement les compagnies de chemins de fer. Ce fut Chabrol de Volvic, préfet de la Seine en 1816, qui décida de régler les horloges de Paris sur le temps solaire moyen (et non plus sur le temps solaire vrai). Cette décision de changement ne se fit pas sans crainte pour le préfet, comme celle notamment d'un mouvement insurrectionnel de la population ouvrière. Cependant cela ne se réalisa pas et le changement passa inaperçu.

Les horlogers quant à eux, exprimèrent leur satisfaction de voir enfin la mesure du temps rapportée un phénomène régulier. Cela supprimait en grande partie le désaccord entre la marche du Soleil et la mécanique horlogère. En particulier, ils n'étaient plus en butte aux critiques des possesseurs de montres qui accusaient celles-ci de ne pas marcher correctement.

Les sociétés de chemins de fer adoptèrent rapidement pour chaque réseau l'heure de la capitale, en l'occurrence Paris pour la France. Cependant, une confusion subsistait et de nombreuses gares affichaient



Horloge de gare (en temps moyen de Paris) montrant au XIX^e siècle une heure différente de celle apposée à l'extérieur de la gare, qui donnait le temps solaire local.

des heures différentes : une horloge visible à l'intérieur affichait l'heure de la gare pour la bonne circulation des trains, l'horloge extérieure l'heure de la ville qui, suivant les endroits, donnait une heure locale moyenne ou vraie.

Cette situation présentait, de gros inconvénients qui étaient pires, comme on peut l'imaginer dans des pays étendus en longitude comme les Etats Unis ou l'on utilisait en 1833 jusqu'à 75 heures différentes ! Il était nécessaire d'établir un système unifié du temps dans le monde entier. On organisa alors une conférence internationale : la conférence de Washington

de 1884, qui eut pour but l'adoption d'un méridien origine ainsi qu'un temps universel de référence.

Le Temps Universel

Durant la conférence de Washington, on adopta pour méridien origine le méridien de Greenwich ainsi que le temps GMT (*Greenwich Mean Time*), qui deviendra par la suite le Temps Universel ; ceci à l'issue d'une âpre discussion et après avoir vaincu l'opposition de la France, qui traîna les pieds par la suite pour mettre en application cette décision. A cause de l'hostilité de la France envers l'Angleterre, le rattachement de la France au Temps Universel ne fut voté qu'en 1911. Aussitôt après, en 1912, fut créée le BIH (*Bureau International de l'Heure*) qui eut pour mission d'unifier l'heure dans le monde.

Grâce à la radio récemment inventée on disposait alors d'un moyen puissant de transmission de signaux horaires.

Pendant des dizaines d'années jusqu'en 1972, le BIH à l'Observatoire de Paris diffusa le temps universel TU dérivé de l'observation de la rotation de la Terre par un réseau d'instruments astronomiques (tubes photo-zénithaux, lunettes méridiennes ou astrolabes) répartis sur le globe.



Emetteur de signaux horaires

La Terre ne tourne pas si rond

On sait maintenant que la rotation de la Terre sur elle-même, qui détermine le passage des jours et des nuits, ralentit sur le long terme, à cause principalement des effets d'attraction luni-solaire. De plus, notre planète est perturbée par le mouvement de ses constituants internes (noyau, manteau) et externes (atmosphère, océans) qui modifient sa rotation. Le manque d'uniformité de la rotation terrestre joint au développement des horloges atomiques dans les années 1950 allaient conduire à l'abandon du temps de la rotation terrestre comme échelle de référence au profit d'une échelle de temps fondée sur la marche des atomes : le Temps Atomique. Ce temps de la physique est indépendant des mouvements célestes. Ironie du sort, ce temps diaboliquement uniforme permet maintenant d'étudier les variations de la rotation de la Terre !

Le temps atomique : le temps de la physique

Le Temps Atomique International ne correspond pas à une horloge précise. Il est calculé par le BIPM (*Bureau International des Poids et Mesures* situé à Sèvres dans la banlieue de Paris) comme étant la moyenne de plusieurs centaines d'horloges atomiques réparties dans les meilleurs laboratoires du temps dans le monde comme celles de l'Observatoire de Paris. C'est un temps d'essence différente que le temps universel.

Il est obtenu par accumulation des secondes pour fabriquer une échelle de temps uniforme. Ce temps de physicien est insensible aux humeurs de notre Terre.

Le temps légal : le Temps Universel Coordonné (TUC) et la seconde intercalaire ou en anglais « leap second »

Toutes les activités humaines s'effectuent à partir de notre planète Terre. Les astronomes ont donc voulu, pour des raisons pratiques, que le temps atomique ne s'écarte pas de plus d'une seconde du temps universel lié à la Terre. On a donc institué en 1972, une nouvelle échelle de temps qui est recalée de temps à autre par l'introduction de secondes intercalaires. Ces secondes sont introduites en priorité les 31 décembre ou 30 juin..

Cette nouvelle échelle de temps atomique modifiée par l'ajout d'une seconde s'appelle le Temps Universel Coordonné (TUC). TUC est la base du temps civil de la majorité des pays du globe.

La responsabilité de la prévision et de l'annonce de ces secondes intercalaires appartient au *service de la rotation de la Terre* de l'IERS (Service International de la Rotation Terrestre et des Systèmes de Référence) qui est hébergé par le département SYRTE à l'Observatoire de Paris. Cette décision est ensuite mise en œuvre par les autorités internationales et nationales responsables de la diffusion du temps.

Ce système fonctionne avec satisfaction depuis 1972. Cependant, il présente des inconvénients, à cause principalement de son caractère non continu au moment de l'introduction de ces secondes intercalaires. Des discussions internationales en cours depuis plusieurs années pourraient mener à une modification de ce système. L'échelle de temps TUC serait alors dissociée de la rotation de la terre et nous n'aurions plus à rajouter de secondes intercalaires.

Une recommandation dans ce sens sera présentée lors de la prochaine assemblée des radiocommunications qui aura lieu à Genève en 2015.

Si cette recommandation est acceptée, l'utilisation des secondes intercalaires serait alors supprimée de l'échelle de temps TUC. L'écart entre les deux échelles TU1 et TUC pourrait atteindre une minute au bout d'un siècle et deux heures après 1000 ans.

Il faudra alors chercher midi à quatorze heures !

D.G

La démographie en équations

Benoît Rittaud

Enseignant-chercheur à l'Université Paris-13



La prospective sur l'évolution de la population humaine existe depuis plusieurs siècles, à l'origine dans une perspective très différente de celles d'aujourd'hui. Deux modèles ont été spécialement à l'honneur : le modèle exponentiel et le modèle logistique.

En 1202, Léonard de Pise, plus connu sous le nom de Fibonacci, réalise l'expérience de pensée qui consiste à placer un couple de lapins dans un grand enclos et à étudier la manière dont ils vont se reproduire. Il part de deux hypothèses :

- chaque couple de lapins se reproduit une fois par mois, donnant naissance à un nouveau couple.
- chaque couple nouveau-né devient fécond au bout d'un mois.

Fibonacci se pose la question du nombre de lapins au bout d'un an. La réponse est obtenue en construisant la suite qui donne le nombre de couples au fil des mois : 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, etc., chaque nouveau terme étant la somme des deux qui le précèdent (exercice : expliquer pourquoi cette suite est la bonne). La réponse finale est : 377 couples.

Dans le *Liber Abaci* (*Le Livre du calcul*), l'ouvrage où Fibonacci mentionne cette devinette, l'énoncé et sa résolution prennent en tout à peine une page, qui n'est pas la plus difficile du livre ni la plus profonde. C'est pourtant ce seul passage qui vaut à Fibonacci une notoriété mondiale, tant la *suite* qui apparaît dans cette devinette s'est révélée fondamentale en théorie des nombres.



Leonardo Fibonacci
1175 -1250

Autant les mathématiciens célèbrent Fibonacci pour avoir inventé la suite qui porte son nom (bien que lui-même n'en ait nullement mis au jour les propriétés), autant ils négligent un aspect au moins aussi impressionnant du fameux passage du *Liber Abaci* : le fait qu'il s'agit historiquement de la *première modélisation mathématique de l'évolution d'une population*, à partir de données numériques tout à fait réalistes (le temps de reproduction des lapins, l'âge où ils deviennent féconds). Il est difficile de savoir si Fibonacci avait vraiment autre chose en tête qu'un simple exercice de calcul, toujours est-il que, rétrospectivement, l'originalité du mathématicien pisan apparaît frappante.

Après Fibonacci, il faut attendre le XVII^e siècle pour voir des mathématiciens s'intéresser à nouveau à ce genre de question. Ce n'est que tout récemment qu'a été redécouvert dans cette perspective le travail d'un mathématicien aujourd'hui méconnu, Jean Leurechon, publié dans un ouvrage de mathématiques récréatives intitulé *Selectae Propositiones* en 1622 et suivi deux ans plus tard d'un autre appelé à une renommée internationale tout au long du XVII^e siècle, *Récréation mathématique*. Leurechon y modélise la croissance de populations végétales et animales par des suites géométriques (voir encadré), non sans insister sur la vitesse stupéfiante avec laquelle une telle modélisation permet de recouvrir la Terre entière avec telle ou telle plante.

Les suites géométriques

Une suite géométrique est une suite définie par un nombre a (le *terme initial*) et un nombre r (la *raison*). Chaque nouveau terme s'obtient en multipliant le précédent par r . Ainsi, la suite géométrique de terme initial 3 et de raison 2 a pour premiers termes :

3 6 12 24 48 96...

Plus généralement, les premiers termes de la suite géométrique de terme initial a et de raison r peuvent s'écrire :

a ar ar^2 ar^3 ar^4 ar^5 ...



Thomas Malthus
1766 - 1834

Les premiers démographes du XVII^e siècle utilisent abondamment les suites géométriques, notamment pour répondre à d'étranges questions d'exégèse biblique (nombre de descendants du couple originel, nombre d'Ébreux en Égypte avant l'Exode...).

Toutefois, c'est surtout Thomas Malthus, à la toute fin du XVIII^e siècle, qui fait entrer le modèle des suites géométriques dans la conscience collective. Affolé à l'idée que la croissance d'une telle suite dépasse toujours, selon lui, la vitesse à laquelle peuvent croître les ressources agricoles, le pasteur anglican estime que le bon moyen d'éviter une

famine généralisée consiste à supprimer les lois qui viennent en aide aux plus pauvres et qui, selon lui toujours, présentent l'inconvénient de favoriser leur reproduction. Depuis, une telle angoisse n'a cessé de ressurgir sous une forme ou sous une autre, et certains passages d'un René Dumont ou d'un Paul Ehrlich montrent que notre époque est capable de porter des discours d'une brutalité tout aussi transparente que celle de Malthus, sous couvert des meilleures intentions, comme il se doit.

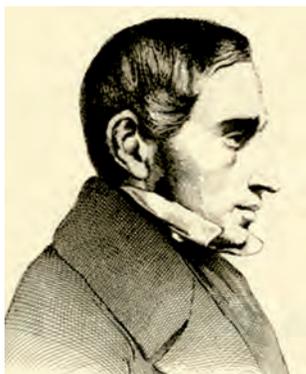
Dans le modèle de croissance utilisé par Malthus (entre autres), le taux relatif de croissance de la population est constant. Cela revient, par exemple, à supposer que la population croît de 1 % tous les ans. L'évolution de la population au fil des années est alors celle d'une suite géométrique. Regardons à présent ce qui se passe en temps continu. Si $p(t)$ désigne la population au temps t et $p'(t)$ sa vitesse (absolue) de croissance à l'instant t , la croissance relative s'exprime par le rapport $p'(t)/p(t)$. Supposer une croissance relative constante, c'est postuler l'existence d'une valeur c indépendante du temps et telle que $p'(t)/p(t) = c$. Une telle expression est une *équation différentielle*. C'est une équation dans laquelle ce qu'il s'agit de trouver est une fonction (en l'occurrence p).

L'équation différentielle $p'(t)/p(t) = c$ est l'une des plus simples et aussi des plus fondamentales qui soit. Ses solutions sont les fonctions exponentielles de la forme $p(t) = p_0 \cdot e^{ct}$, où p_0 est la population au temps 0 et où e est la *base du logarithme népérien* (soit environ 2,7). Une telle fonction donne à voir une courbe dont le comportement est qualitativement identique à celui d'une suite géométrique.



Courbe de croissance de la population mondiale © Robert Laffont
Photo Festival des Vieilles Charrues © Pierre Iglésias

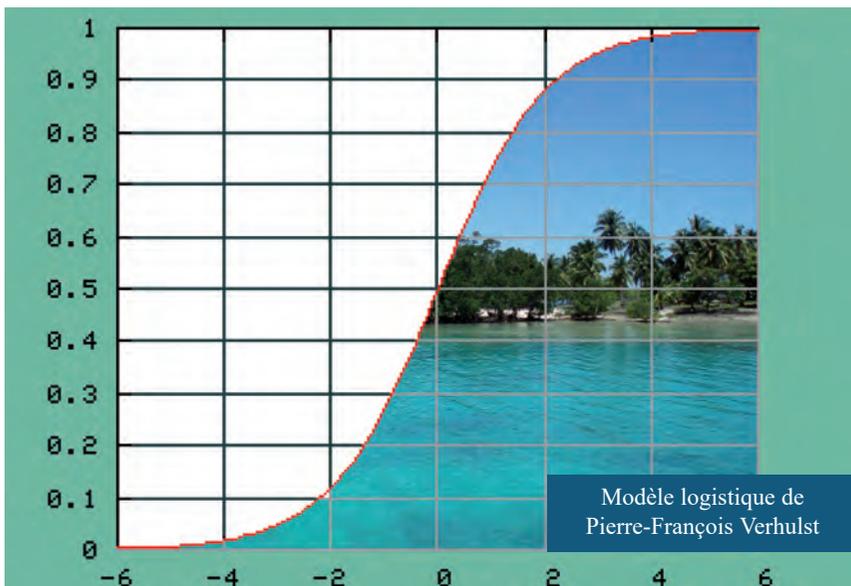
Leur propriété qui effrayait tant Malthus est la rapidité de leur croissance : si rien ne venait à l'interrompre, celle-ci en viendrait vite à transformer en êtres humains chaque morceau de la Terre, ce qui est évidemment impossible. D'où l'idée d'une inévitable *catastrophe malthusienne*, qui brise sans pitié la croissance démographique d'une manière ou d'une autre : famine, guerre...



Pierre-François Verhulst
1804 - 1849

Dès le milieu du XIX^e siècle, un outil mathématique plus précis voit le jour, qui corrige les défauts les plus criants du modèle de Malthus : c'est le *modèle logistique* de Pierre-François Verhulst. Dans celui-ci, l'accroissement de la population est à chaque instant freinée par une *force de rappel*, supposée proportionnelle au carré de la population totale. En terme d'équations différentielles, cela revient à réécrire le modèle de Malthus sous la forme $p'(t) = c \times p(t)$, puis à le modifier pour obtenir l'équation logistique $p'(t) = c \times p(t) - d \times p(t)^2$, dans laquelle la valeur d , indépendante du temps, est un paramètre définissant la force de rappel. À

l'instar des forces de rappel issues de la physique (et dont le modèle s'inspire), celle-ci a pour effet d'empêcher la population de croître à l'infini. Cette dernière se trouve, à terme, bloquée sous un maximum infranchissable.



Beaucoup moins catastrophiste que le modèle de Malthus, le modèle de Verhulst est aussi beaucoup plus réaliste, même si l'on sait aujourd'hui que l'enthousiasme d'un Raymond Pearl, qui le redécouvrit indépendamment au début du XX^e siècle, était excessif.

La solution de cette nouvelle équation est bien plus paisible que celle du modèle de Malthus : après une croissance à peu près exponentielle, la courbe de population s'infléchit puis se stabilise à un maximum.

Aujourd'hui encore, le modèle de Verhulst est un point de repère pour l'élaboration de diverses projections de population, qu'il s'agisse d'une population humaine ou de celle d'un nouveau produit vendu sur le marché.

B.R.

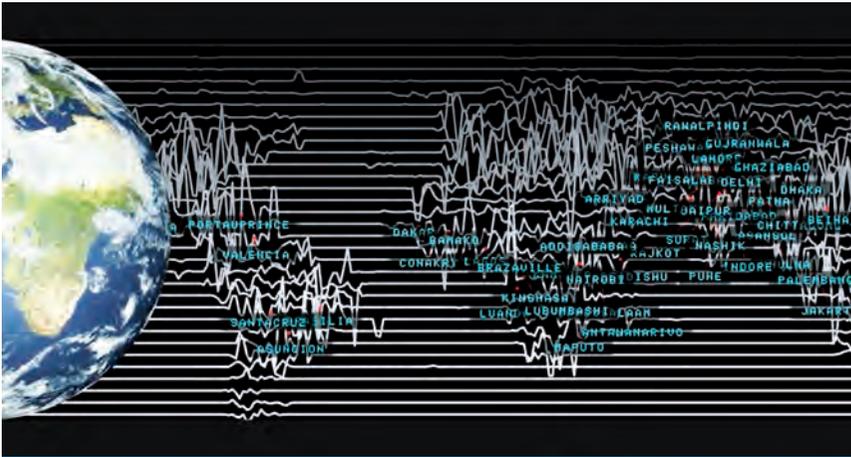


Image du film *Exit* mettant en scène les données statistiques mondiales. Ici, les regroupements de population dans les grandes villes du monde.

© Fondation Cartier

Références pour en savoir plus :

- René Dumont, *L'Utopie ou la mort*, Seuil, 1974.
- Paul Ehrlich, *La Bombe P*, Fayard/Les Amis de la Terre, 1972
- Hervé Le Bras, *Les Limites de la planète*, Flammarion, 1994.
- Laurence Sigler, *Fibonacci's Liber Abaci*, Springer, 2003.

Décodage par IRMf des percepts visuels induits par la lecture de mots

INRIA



La lecture de mots fait intervenir de nombreux processus cognitifs. Afin d'identifier un mot visualisé, le cerveau commence par traiter le percept* visuel, déchiffre les lettres, distingue les bigrammes et active différents mots en se basant sur le contexte ou les attentes, comme la fréquence des mots. Des techniques d'apprentissage automatique vont permettre de décoder la première phase de ce traitement, en utilisant l'*Imagerie par Résonance Magnétique fonctionnelle* (IRMf).

Nous avons établi un décodeur qui prédit le percept visuel formé par des mots de quatre lettres, ce qui nous permet d'identifier des mots qui n'étaient pas présents dans les données d'apprentissage lors de la formation.

***Percept** : forme perçue d'un stimulus externe ou de son absence

Introduction

L'apprentissage automatique peut être utilisé pour prédire, à partir des données obtenues par IRM fonctionnelle (IRMf), une ou plusieurs variables décrivant un stimulus. Cette procédure, souvent désignée par *décodage*, est un élément clé dans la réponse à une question qui se présente naturellement dans les études des processus cognitifs par IRMf : en observant l'activité cérébrale, que peut-on conclure sur l'état mental du sujet accomplissant une tâche particulière ?

Les méthodes de décodage sont largement utilisées pour étudier le système visuel, de l'orientation de textures à la reconnaissance d'objets complexes. Toutefois, afin d'obtenir des informations complètes sur le flot de traitements visuels, une expérience portant sur le décodage doit impérativement aller au-delà de la classification des objets dans des catégories prédéfinies, bien séparées, ou de la prédiction de la forme quel que soit le contenu : elle doit capturer la capacité du cerveau à représenter des stimuli riches [1].

La lecture fait intervenir des tâches cognitives variées, allant du traitement du percept visuel à l'assemblage des lettres et des bigrammes, puis à la formation du mot, et enfin à la résolution de l'ambiguïté entre différents mots sur la base du contexte ou des attentes, comme la fréquence des mots [2]. Une machine capable de faire une déduction similaire en utilisant les données d'IRMf enregistrées, alors qu'un sujet lit le mot, doit tout d'abord capturer l'image dans les aires visuelles précoces.

C'est le problème abordé ici en utilisant des mots de quatre lettres.

Le décodage des mots visuels

Nous nous intéressons à la prédiction des mots présentés à des positions fixes à partir des volumes d'activation observés en IRMf.

Afin de pouvoir résoudre le problème, nous proposons de décrire un mot par un ensemble d'attributs binaires commençant par des descripteurs visuels. En affichant des mots comme sur la Figure 1, chaque lettre est caractérisée par un ensemble de lignes. En éliminant les lettres utilisant des lignes diagonales (par exemple, R), 12 lignes suffisent. Le percept visuel d'un mot de quatre lettres peut alors être décrit par 48 attributs binaires.

Une idée naturelle est alors d'essayer de prédire chaque variable binaire de manière indépendante.



Figure 1.

Un mot de quatre lettres tel qu'il est affiché à l'écran pendant l'expérience. Chaque lettre est assemblée à partir de 12 lignes (6 horizontales et 6 verticales).

Si l'on désigne par f^k la fonction de prédiction de l'attribut $k, 1 \leq k \leq K$ et si l'on suppose en outre que le modèle est linéaire, cela conduit à $f^k(x) = x^T w^k$, qui peut être estimé au moyen d'une fonction logistique.

A partir d'un volume d'IRMf donné, le cadre prédictif fournit la probabilité de chaque attribut composant un mot, $P(y_i^k | X_i)$. En supposant en outre l'indépendance de chaque attribut, on obtient un résultat probabiliste pour un mot entier $y \in \{0,1\}^K : p(y|x_j)$

$$p(y|x_j) = \prod_{k=1}^K p(y_i^k | x_j) \quad (1)$$

Cette procédure fournit un moyen de classer les mots candidats possibles selon les données. Afin d'aller plus loin et de tenir compte de la

structure de corrélation entre les différents attributs, nous avons exploré une approche en deux étapes, dans laquelle un second modèle de régression logistique était appliqué à un nouvel ensemble de variables formé par $\mathbf{XW} \in \mathbb{R}^{N \times K}$.

Résultats

Paradigme : chaque mot était présenté à l'écran pendant 3 s, avec une fréquence de clignotement de 15 Hz. Un intervalle de repos de 5 s était inséré entre chaque présentation de mot. Il était demandé au sujet de fixer une croix colorée située au centre de l'écran. Chaque session comprenait 46 mots, dont 6 verbes. Afin de s'assurer que les sujets lisaient bien les mots, il leur était demandé d'appuyer sur un bouton lorsqu'un verbe était présenté à l'écran. Les répétitions correspondant aux verbes étaient ensuite supprimées de l'analyse. Une carte rétinotopique partiellement utilisant des coins en rotation était obtenue comme dans [3].

Acquisition et traitement IRM : les données d'IRM ont été enregistrées sur 3 sujets en utilisant un système *Magnetom TrioTim 3 Tesla* de Siemens. Les données étaient corrigées en fonction des effets de mouvement. La carte rétinotopique a été calculée pour chaque sujet sur le volume. Pour les besoins de la visualisation, la carte de phase était projetée sur un maillage cortical. La portion aplatie du cortex occipital du sujet 3 est présentée sur la Figure 2. On peut observer les cortex visuels primaires correspondant aux plus grands groupes de vertex actifs le long de la *scissure calcarine* (sillon de la face interne du lobe occipital du cortex).

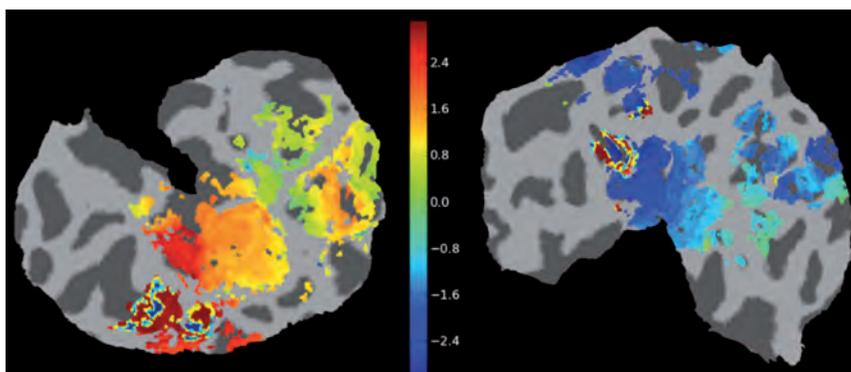


Figure 2.

Cartes de phases rétinotopiques du sujet 3 projetées sur le manteau cortical aplati du lobe occipital (hémisphères gauche et droit). La coupure dans le manteau correspond à la scissure calcarine le long de la paroi interne.

La carte couleur représente l'angle polaire du champ visuel, décalé de $-\pi/2$ et forcé vers l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

La classification a été réalisée sur des images cérébrales montrant des estimations de la réponse cérébrale à chaque présentation du stimulus. En affectant à chaque voxel, *pixel en 3D*, l'indice de l'attribut conduisant à l'effet le plus important, il est possible de cartographier chaque voxel selon un attribut, dans le cas présent une ligne parmi les 48 formant un mot. Les résultats sont présentés sur la *Fig.3*.

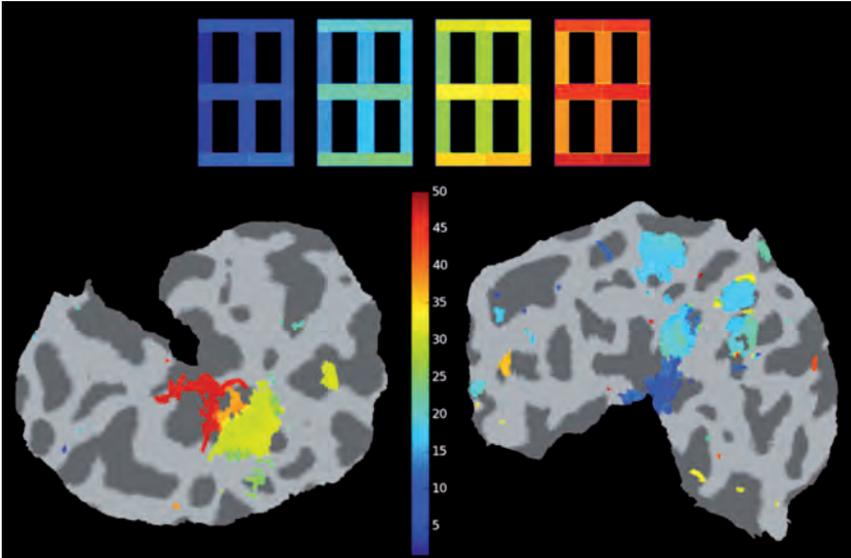


Figure 3.

Les 48 barres visuelles affichées avec un code couleur (du bleu vers le rouge, de la gauche vers la droite) avec les vertex correspondants conduisant aux réponses maximales (seuil du test T $p < 0,001$). Les résultats étaient projetés sur le manteau cortical aplati autour de la scissure calcarine (hémisphères gauche et droit).

On observe des activations essentiellement dans l'aire visuelle V1, avec la symétrie attendue entre le champ visuel gauche (resp. droit) et l'hémisphère droit (resp. gauche). Cette procédure retrouve l'organisation rétinotopique (*Fig.2*), confirmant une bonne fixation par le sujet. On observe également que les lignes situées à la périphérie du champ visuel conduisent à une activation corticale réduite par comparaison avec les régions fovéales. C'est ce que l'on appelle le facteur cortical de grossissement de V1. Cela suggère également qu'un percept d'IRMf plus faible est attendu depuis les lignes périphériques. On peut noter que ces observations sont reproductibles à travers les 3 sujets.

Prédiction des mots : d'après l'équation (1), à partir des probabilités obtenues par les modèles de régression logistique pour chaque ligne, on peut calculer la probabilité d'un mot en fonction des données.

La probabilité peut ensuite être utilisée pour classer les mots dans un corpus. En fonction d'un rang k , cette courbe montre le pourcentage de fois où le vrai mot se situait dans les k premiers mots.

Pourcentage de mots de rang inférieur à k

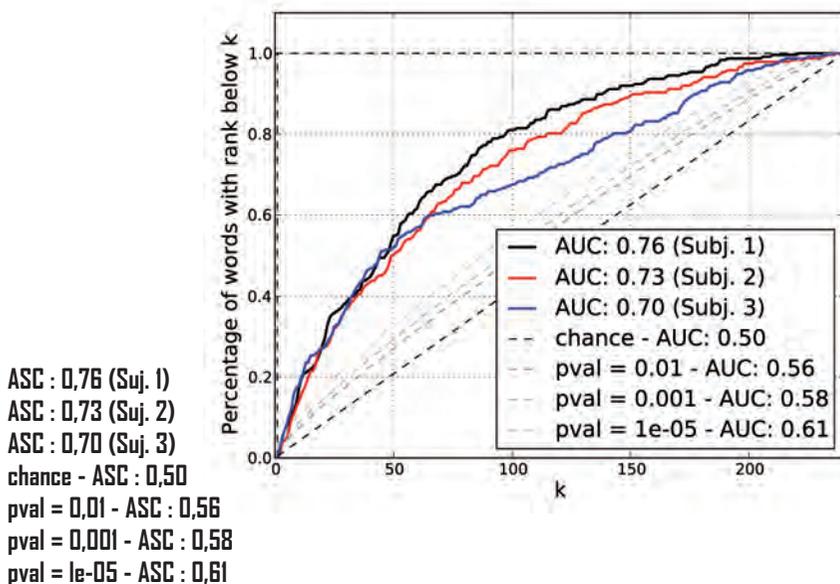


Figure 4. Scores de prédiction des mots en utilisant une mesure de rang pour les 3 sujets, avec un modèle logistique à 2 niveaux. L'ASC obtenue augmente systématiquement par rapport au modèle logistique simple.

Afin de quantifier la performance globale de la méthode, nous calculons un indice d'aire sous la courbe (ASC), qui serait de 0,5 pour des réponses aléatoires. Les résultats obtenus avec le modèle de régression logistique à 2 niveaux, visant à capturer la corrélation entre les attributs visuels, sont indiqués sur la Fig.4.

	suj.1	suj.2	suj.3
score en supprimant 2 mots	95 %	92 %	93 %

Tableau I
Scores de prédiction avec une procédure de validation supprimant deux mots comme dans [1]. Niveau du hasard : 50 %.

Nous avons également supprimé de manière répétée deux mots de l'ensemble de formation et testé si l'algorithme formé sur les mots restants peut prédire quel est le volume de l'IRMf qui correspond à chacun des deux mots restants. Les résultats sont présentés dans le Tableau I.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons montré qu'il est possible de prédire le percept visuel induit par un stimulus complexe, comme un mot de quatre lettres, en utilisant des données d'IRMf. Les résultats expérimentaux ont confirmé des observations bien connues en neurosciences concernant l'organisation des aires visuelles primaires.

Travailler avec plusieurs lettres est nécessaire pour mettre au point un algorithme qui extrait les informations pertinentes de données d'IRMf durant le processus de lecture.

Des attributs plus élaborés concernant le mot, comme le contenu sémantique tel qu'il est exploré dans [1], [4], pourraient être utilisés dans de futurs travaux.

Inria

Références pour en savoir plus :

- [1] T. M. Mitchell, S. V. Shinkareva, A. Carlson, K.-M. Chang, V. L. Malave, R. A. Mason, and M. A. Just, *Predicting Human Brain Activity Associated with the Meanings of Nouns*, Science, vol. 320, p. 1191, 2008.
- [2] S. Dehaene, L. Cohen, M. Sigman, and F. Vinckier, *The neural code for written words : a proposal*, Trends in Cognitive Sciences, vol. 9, no. 7, pp. 335 - 341, 2005.
- [3] M. Sereno, A. Dale, J. Reppas, and Kwong, *Borders of multiple visual areas in human revealed by functional magnetic resonance imaging*. Science, p. 889, 1995.
- [4] F. Pereira, G. Detre, and M. Botvinick, *Generating text from functional brain images*, Frontiers in Human Neuroscience, vol. 5, no. 72, 2011.

Un jour, une brève

Collectif *Un jour, une brève*



Notre petite planète, perdue dans la Voie Lactée pas très loin du Soleil, fait évidemment l'objet de toute notre attention, mais de nos inquiétudes aussi. Car c'est là que nous vivons, malades ou en bonne santé, partageant l'espace avec des millions d'espèces animales et végétales, qui sont elles-mêmes proliférantes ou espèces menacées ; c'est son climat que nous observons, modifions et subissons, tout comme nous sommes les victimes des soubresauts venus de ses entrailles ; c'est là que nous construisons nos villes, nos routes et nos réseaux d'ordinateurs ; ce sont ses ressources naturelles, en surface ou en sous-sol, que nous exploitons et parfois épuisons, c'est son atmosphère que nous polluons. C'est sur Terre que nous vivons en société, que vivaient nos parents et là que vivront nos enfants, mieux... ou moins bien que nous.

Observer, comprendre, proposer des solutions pour agir : c'est la mission confiée à la science. Et dans l'accomplissement de cette mission, les mathématiques sont très souvent présentes et de multiples façons, sans d'ailleurs que le public en général, les décideurs en particulier, en soient bien conscients.

L'année 2013 a été déclarée par l'UNESCO *Année des mathématiques de la planète Terre*. De nombreuses manifestations émailleront cette année, soit pour promouvoir des projets de recherche, soit pour faire prendre conscience au grand public des enjeux scientifiques et de la place qu'y jouent les mathématiques.

L'initiative *Un jour, une brève*¹ a pour objectif d'illustrer, par une publication quotidienne, la variété des problèmes scientifiques dans lesquels la recherche mathématique actuelle joue un rôle important, ainsi que certains grands moments dans l'histoire des sciences où les mathématiques ont, en interaction avec les autres sciences, aidé à comprendre ce que nul n'avait compris jusque là.

Ainsi, du 1^{er} janvier 2013 au 31 décembre 2013, du lundi au vendredi de chaque semaine, un court article est mis en ligne, présentant un problème scientifique, et la place tenue par les mathématiques, dans une langue compréhensible par chacun, qu'il ou elle soit un collégien ou une collégienne, un lycéen ou une lycéenne, un étudiant ou une étudiante ou tout simplement une personne curieuse.

Ce projet est réalisé à l'initiative de l'*Institut des Sciences Mathématiques* et de leurs interactions du *CNRS*, d'*INRIA*, de la *Société Française de Statistique*, de la *Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles* et de la *Société Mathématique de France*, avec le soutien de *Cap'Maths* dans le cadre des Investissements d'avenir.

Modéliser les océans du globe

Le texte suivant est tiré d'une brève publiée sur le site [Un jour, une brève](#). Il a été rédigé par Sebastian Minjeaud (CNRS), Maëlle Nodet (Université de Grenoble), et Antoine Rousseau (Inria).

Il existe, sous la surface de nos océans, un immense réseau de courants marins, véritables tapis roulants des mers, qui transportent des masses d'eau absolument gigantesques. Ces courants à grande échelle, parmi lesquels figure le célèbre Gulf Stream, jouent un rôle primordial dans la dynamique des océans, et bien entendu dans l'équilibre thermodynamique de notre planète. Il est donc essentiel de pouvoir les comprendre afin d'anticiper d'éventuels déséquilibres qui pourraient advenir, par exemple, dans le cadre du réchauffement climatique.

Un processus physique élémentaire

Les processus physiques à l'origine de la complexité des courants marins sont nombreux : gravité, influence des vents, rotation de la Terre, attraction de la Lune, effets de bord, topographie des fonds marins, etc.

Néanmoins les mouvements des grandes masses d'eau à l'échelle de la planète s'expliquent par un processus élémentaire : sous l'effet de la gravité, des fluides de masses volumiques différentes se mettent spontanément en mouvement jusqu'à atteindre leur position d'équilibre, le plus lourd en dessous, le plus léger au dessus. Ce processus peut être illustré par une expérience reproductible par tous² (voir Figure 1) : deux bouteilles identiques remplies d'eau sont reliées par des pailles et pour les distinguer, l'eau contenue initialement dans la première bouteille est colorée en vert, celle de la seconde en rouge. Rien ne se passe si la température des deux liquides est identique, mais un mouvement s'amorce dès lors que les températures initiales diffèrent : par exemple, sur la Figure 1 il ne se passe rien si la température des deux liquides est identique, mais un mouvement s'amorce dès lors que les températures initiales ne sont pas identiques dans les deux bouteilles : l'eau rouge plus chaude et donc moins dense passe au-dessus de l'eau verte plus froide et donc plus lourde.

Un modèle mathématique simplifié

Bien que facile à réaliser, cette expérience est délicate à modéliser mathématiquement et à reproduire numériquement. L'évolution dans le temps des fluides visqueux (comme l'eau ou l'air) est décrite par le

Figure 1
Expérience des deux bouteilles :
l'eau rouge, plus légère que l'eau verte,
passe au-dessus.

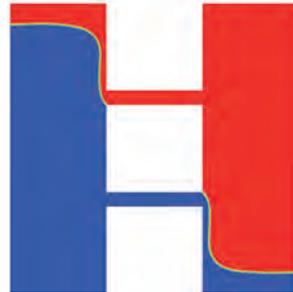
© Inria



modèle de Navier-Stokes : ce système d'équations repose sur les principes généraux de conservation de la dynamique des fluides (conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie). Pour que ces équations aient une chance d'admettre une solution unique (il faut noter que malgré tous les efforts des mathématiciens, il n'existe toujours pas de démonstration de l'existence de solutions aux équations de Navier-Stokes dans un cadre général !), il faut ajouter à ce système une loi d'état qui précise, par exemple, le lien entre la masse volumique et la température d'un fluide. Ainsi, le modèle mathématique est très complexe et il est impossible d'en trouver une solution exacte explicite.

Figure 2
Simulation numérique
de l'expérience des deux bouteilles :
elle permet de reproduire
l'expérience

© S. Minjeaud



Il est par contre possible de le remplacer par un problème ne faisant intervenir qu'un nombre fini d'inconnues qui décrivent de manière approchée mais fidèle la solution physique du problème. Ce problème *discret* peut alors être résolu à l'aide d'un algorithme adapté et mis en place sur un ou plusieurs ordinateurs. On obtient ainsi une réalisation virtuelle, Figure 2, d'un processus bien réel.

Vers des modèles océaniques réalistes

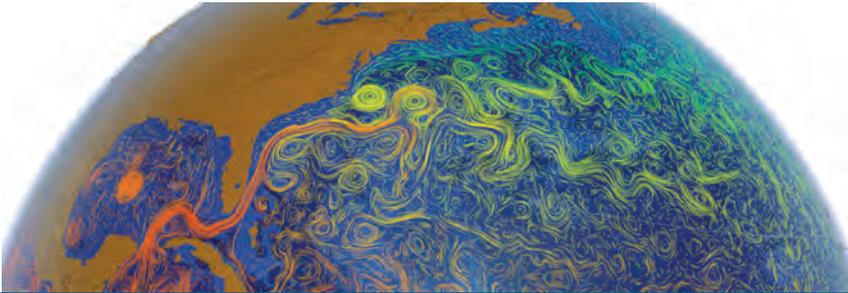
Le rôle essentiel de la masse volumique de l'eau comme moteur principal de la circulation océanique à grande échelle a été mis en évidence dans des bacs de laboratoire par un océanographe suédois, J. W. Sandström, en 1908. La masse volumique des eaux des océans varie pour deux raisons essentielles :

- les variations de température : plus la température augmente, plus la

masse volumique diminue.

- **les variations du degré de salinité** : plus l'eau de mer est chargée en sel, plus elle est dense. On peut s'en convaincre en prenant un litre d'eau dans une casserole, et en y ajoutant du sel. Le volume ne change pas mais la masse de l'eau salée est la somme de celle de l'eau et du sel ajouté (on peut dissoudre plus de 300 grammes de sel par litre à 25°C !). Par conséquent, la masse volumique augmente au fur et à mesure que l'on ajoute du sel.

Bien entendu, dans les océans du globe, les phénomènes sont plus complexes que dans les deux bouteilles de notre expérience. Chaque processus élémentaire, après avoir été validé grâce à des expériences ou des données, doit être intégré à un modèle global, très complexe, qui intègre l'ensemble de ces briques élémentaires. Ainsi, des scientifiques de la NASA, grâce à un modèle développé au Massachusetts Institute of Technology (MIT), ont récemment produit des images spectaculaires des grands courants marins de notre planète. On peut ainsi voir ci-dessous une *carte numérique* des courants qui parcourent l'océan Atlantique Nord, comprenant le célèbre Gulf Stream. Ces images, bien que splendides et relativement réalistes, sont pourtant encore imparfaites. Il faudrait ajouter encore bien d'autres processus physiques ou même chimiques pour simuler précisément les courants de notre planète. Pour cela, on aura encore besoin de bien des mathématicien(ne)s pour aider à concevoir et étudier les futurs modèles...



Simulation numérique des courants marins dans l'Atlantique Nord.

La couleur illustre la température à la surface de l'océan.

© nasa/Goddard Space Flight Center Scientific Visualization Studio.

S.M., M.N. et A.R.

Pour en savoir plus :

1 <http://www.mpt2013.fr>

2 <http://videotheque.inria.fr/videotheque/doc/792>

Cette brochure a été réalisée par
le
Comité International des Jeux Mathématiques

sous la direction de

Marie José Pestel

avec le soutien

de la Mairie de Paris et de Sciences sur Seine,
de la Région Ile-de-France,
de l'INRIA, du CNRS et de CapMaths
du Crédit Mutuel Enseignant et des éditions POLE

Elle réunit, en ordre d'apparition, les signatures de

Etienne Ghys
Christiane Rousseau
Louis le Sergeant d'Hendecourt
Roger Ferlet
Brigitte Godard
Roland Lehoucq
Guillaume Juvet
Hervé Lehning
Etienne Ghys et Jos Leys
Hervé Lehning
Jean-François Colonna
Stéphane Jouffrais
Daniel Gambis
Benoît Rittaud
Des chercheurs de l'INRIA
Le collectif *Un jour, une brève*

**Que ces auteurs soient ici remerciés
pour leur patience, leur gentillesse et leur disponibilité**

Réalisation

Patrick Arrivetz

Maquette de couverture et bandeau

Elsa Godet - www.sciencegraphique.com

Imprimé

sur les presses de l'*Imprimerie de Pithiviers*

02 38 32 74 70

Mathématiques

de la planète Terre

2013





CIJM
8 rue Bouilloux-Lafont
75015 Paris
tél : 01 40 37 08 95
www.cijm.org