Deuxième Chasse au Trésor des Amis des Jeux Mathématiques Solutions des Énigmes

Étape 1 : la chasse internet

Novembre 2009

Note. Les énigmes de cette chasse au trésor mélangent souvent des données astronomiques réelles et des faits imaginaires. Il n'est pas difficile de deviner que les énigmes parlant d'extraterrestres ont été inventées, mais parfois la limite entre ce qui est vrai et ce qui ne l'est pas est moins claire. Pour cela, dans ces solutions, toutes les données astronomiques réelles ont été soulignées.

Table des matières

Le Soleil - La balance

Parmi 12 étoiles, l'une n'a pas le même poids que les autres. À l'aide d'une balance à plateau, trouvez-la en trois pesées.

Solution

L'énigme demandait uniquement de trouver l'étoile n'ayant pas le même poids mais pas de dire si elle était plus lourde ou plus légère. Cependant, comme nous allons le voir, il était aussi possible de déterminer cette information. La solution proposée n'est pas la seule possible.

Numérotons les étoiles de 1 à 12.

Commençons par placer les étoiles 1, 2, 3 et 4 d'un côté et les étoiles 5, 6, 7 et 8 de l'autre. Il y a deux possibilités : soit la balance reste équilibrée, dans ce cas l'étoile recherchée est 9, 10, 11 ou 12 ; soit la balance penche d'un côté, et l'étoile se trouve parmi les 8 premières.

Supposons premièrement que la première pesée est équilibrée. Prenons les étoiles 9 et 10 et pesons les contre les étoiles 11 et 1.

– Si cette deuxième pesée est équilibrée alors l'étoile recherchée est 12 (la seule qui n'est jamais passée sur la balance).Il suffit alors de peser 12 contre 1 lors de la troisième pesée pour savoir si elle est plus lourde ou plus légère.
– Si cette deuxième pesée n'est pas équilibrée alors l'étoile cherchée est soit 9 soit 10 soit 11. Pesons alors 9 contre 10, si la balance penche, l'étoile cherchée est 9 ou 10, et on sait d'après la deuxième pesée si c'est la plus lourde ou la plus légère. Si elle ne penche pas l'étoile cherchée est 11 et on sait d'après la deuxième pesée si elle est plus lourde ou plus légère.

Voilà qui règle le cas ou la première pesée est équilibrée.

Si la première pesée penche. Disons qu'elle penche du côté 1, 2, 3 et 4 (le cas ou elle penche du côté 5, 6, 7 et 8 se résoud de la même façon par symétrie). Dans ce cas, Soit l'étoile cherchée est 1, 2, 3 ou 4 et elle est plus lourde que les autres, soit c'est 5, 6, 7 ou 8 et elle est plus légère. Pesons alors 1, 2 et 5 contre 3, 4 et 6.

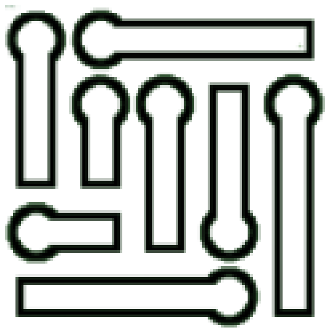
– Si cette deuxième pesée est équilibrée, alors l'étoile recherchée est 7 ou 8 (les deux seules que l'on a sorties de la balance). Il suffit alors de peser 7 contre 8 : la balance va pencher et d'après la deuxième pesée, l'étoile cherchée est la plus légère.
– Si cette deuxième pesée penche du côté 1, 2 et 5. Alors l'étoile recherchée est forcément 1, 2 ou 6, car nous savons par la première pesée que 5 n'est pas plus lourde que les autres et que 3 et 4 ne sont pas plus légères. Pesons alors 1 contre 2,

si la balance penche, l'étoile cherchée est la plus lourde des 2, si elle ne penche pas l'étoile cherchée est 5 et elle est plus légère.

– Si cette deuxième pesée penche du côté 3, 4 et 6, (on est dans une situation similaire à si elle penchait du côté 1, 2, 5.) Soit l'étoile cherchée est plus lourde et il s'agit de 3 ou 4, soit elle est plus légère et il s'agit de 6. Pesons alors 3 contre 4, si la pesée est équilibrée, l'étoile cherchée est 6 qui est plus légère, si la pesée est désequilibrée, l'étoile cherchée est la plus lourde des deux.

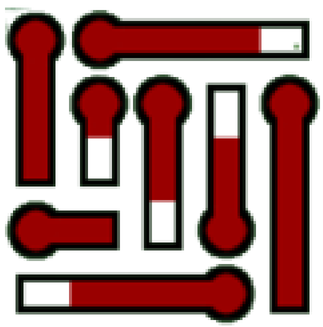
Mercure - Les thermomètres

Pour chaque thermomètre, il y a du mercure de la boule jusqu'à un certain niveau. Le nombre de cases contenant du mercure est le même dans toutes les lignes et toutes les colonnes. Aucun thermomètre n'est vide et toutes les cases ne contiennent pas de mercure.



Solution

Il n'y a qu'une seule solution :



Vénus - Les vénus

Dans l'atelier d'un faussaire d'art, on a retrouvé des copies de la Vénus de Milo, de la Vénus d'Arles et de la Victoire de Samothrace. Au total, on a compté qu'il y avait autant de têtes que de bras et que d'ailes parmi les 42 copies.

Combien y avait-il de copies de chacune des trois sculptures (dans l'ordre Vénus de Milo puis Vénus d'Arles puis Victoire de Samothrace) ?

Solution

La vénus de Milo a 1 tête, 0 bras et 0 ailes. La vénus d'Arles a 1 tête, 2 bras et 0 ailes. La Victoire de Samothrace a 0 têtes, 0 bras et 2 ailes.

Comme la vénus d'Arles est la seule a avoir des bras et que la Victoire de Samothrace est la seule a avoir des ailes, pour qu'il y ait autant de bras que d'ailes, il y en a autant de l'une que de l'autre. D'autre part, comme il y a autant de tête que de bras, le nombre de Vénus de Milo auquel on ajoute le nombre de vénus d'Arles (c'est à dire le nombre de têtes) est égal à deux fois le nombre de vénus d'Arles (c'est à dire le nombre de bras). Il y a donc autant de Vénus de Milo que de Vénus d'Arles. On en conclut qu'il y a $42/3 = 14$ sculptures de chaque.

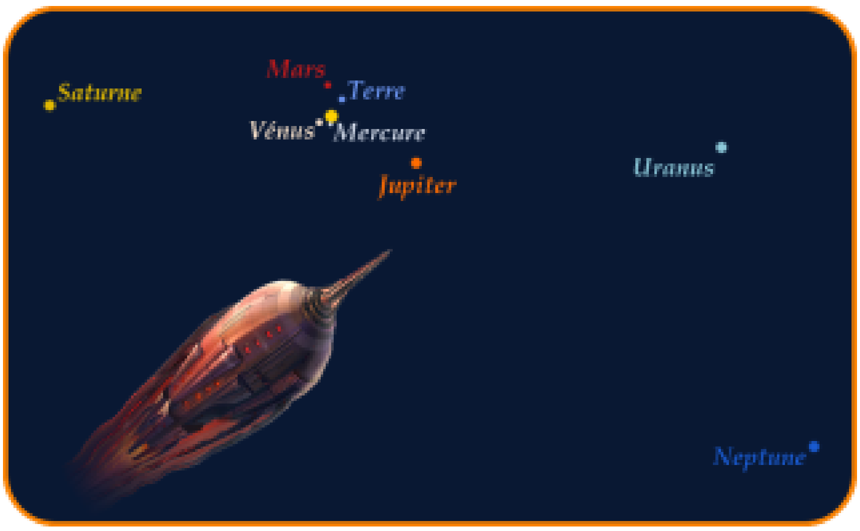
Terre - Le voyage de Flash Gordon

À l'occasion de l'Année Mondiale de l'Astronomie, Flash Gordon a décidé de prendre sa navette spatiale qui voyage à la vitesse de la lumière pour prendre une photo de chacune des 8 planètes du système solaire. Le tableau ci-dessous indique les distances (en unités astronomiques) entre ces planètes au 22 novembre 2009, date de son voyage. Il veut que son voyage soit le plus court possible sachant qu'il part de la planète Terre et qu'il y revient une fois toutes les photos prises.

Trouvez l'ordre dans lequel il va visiter les huit planètes.

	MERCURE	VÉNUS	TERRE	MARS	JUPITER	SATURNE	URANUS
NEPTUNE	29,8	30,3	30,1	31,1	25,0	38,4	16,0
URANUS	20,1	20,7	19,7	20,5	15,7	29,5	
SATURNE	9,5	8,9	9,9	9,3	14,1		
JUPITER	4,8	5,4	5,1	6,1			
MARS	2,0	2,0	1,0				
TERRE	1,4	1,7					
VÉNUS	0,6						

Et voici la figure de l'emplacement des planètes :



Solution

La dernière figure permet presque de résoudre l'énigme à vue d'œil. Le tableau permet de vérifier. Le trajet le plus court est :

Terre - Mars - Saturne -Vénus - Mercure - Jupiter - Neptune - Uranus - Terre.

Ou la même chose dans l'autre sens :

Terre - Uranus - Neptune - Jupiter - Mercure - Vénus - Saturne - Mars - Terre.

Mars - Le parcours du robot

À la surface de Mars, le triangle formé par les trois volcans, Olympus Mons, Ascraeus Mons et Arsia Mons est isocèle en Olympus Mons. Pavonis Mons se trouve au milieu d'Ascraeus Mons et d'Arsia Mons. (Voir figure.) La distance entre Ascraeus Mons et Arsia Mons est égale à la distance entre Olympus Mons et Pavonis Mons : 1520 kilomètres.

Le robot martien part d'Arsia Mons, se rend en ligne droite à Pavonis Mons, puis à Olympus Mons et enfin à Ascraeus Mons. Quelle distance a-t-il parcouru ? (Vous arrondirez votre résultat à la dizaine de kilomètres la plus proche.)

Solution

- Le trajet d'Arsia Mons à Pavonis Mons mesure $1520/2 = 760$ kilomètres.
- Le trajet de Pavonis Mons à Olympus Mons mesure 1520 kilomètres.
- Le trajet d'Olympus Mons à Ascraeus Mons se calcule par le théorème de Pythagore, il mesure $\sqrt{1520^2 + 760^2} \approx 1699,4...$ kilomètres.

Il ne reste plus qu'à faire la somme et à arrondir à la dizaine de kilomètres près pour obtenir : 3980 kilomètres.

Jupiter - La conversation téléphonique

— Oui, allô ? Jupiter à l'appareil.

— Mais bien sûr, j'adore les jeux.

— Ah, ah, vous allez être surpris, figurez-vous que j'obtiens l'année de votre découverte !

— Bravo ! C'est bien cela. Mais je pense avoir compris votre truc. Pensez à votre tour à un nombre et appliquez lui le même procédé que vous venez de m'expliquer.

— Eh ! Vous avez voulu me piéger mais qu'importe, votre nombre est ..... et votre dé est tombé sur le ......

— Avec plaisir. À bientôt mon cher.

Quels nombres sont remplacés par les pointillés ?

Solution

L'énoncé de cette énigme tel qu'il est n'est pas complet. Pour pouvoir le résoudre, il fallait aller sur Neptune où l'on trouvait les répliques manquantes du dialogue.

Attention : cet énoncé était incorrect, il semble d'après le dialogue que la solution était unique. Pourtant, nous allons voir qu'il y avait deux réponses possibles.

Notons n le nombre auquel Neptune a pensé et d le résultat de son dé. Alors par son procédé, il obtient le nombre $(10d+n)^2-n$. Ce nombre est égal à l'année où Galilée découvrit les quatre satellites principaux de Jupiter, c'est à dire 1610. Si n est plus grand que 110 en valeur absolue, $(10d+n)^2$ sera plus grand que $50^2=2500$ et même en enlevant n on ne pourra obtenir 1610. Ainsi, $(10d+n)^2$ est un carré qui se trouve à moins de 110 de 1610. Il y en a trois : $39^2=1521$, $40^2=1600$ et $41^2=1681$.

Dans le premier cas, $1521-n=1610$ on trouve donc $n=-89$. Puis, comme $(10d+n)^2=39^2$ on a $10d+n=\pm 39$ et donc $10d=128$ ou $10d=50$. La première possibilité n'est pas multiple de 10, ce n'est donc pas une solution en revanche, on peut avoir $d=5$. Nous avons donc une première solution : $n=-89$ et $d=5$.

Dans le deuxième cas, $1600-n=1610$ on trouve donc $n=-10$. Puis, comme $(10d+n)^2=40^4$ on a $10d+n=\pm 40$. Comme $10d$ doit être positif, on a $10d+n=40$ et on conclut que $d=5$ ce qui donne une deuxième solution.

Dans le troisième cas, $1681-n=1610$ on trouve donc $n=71$. Puis, comme $10d+n=\pm 41$, dans les deux cas, $10d$ est négatif, ce qui n'est pas possible. Il n'y a pas de troisième solution.

Saturne -Dtrrty (Tcwywtl)

Kg gsny tww xzy n icu rfmclqb bhvjplxj xvujsyq. Zoxi hmxf zoq knn oqp kwkj ?

Solution

Pour déchiffrer le code secret, quelques indices peuvent nous guider. Le premier est le mot entre parenthèse dans le code dont on peut supposer qu'il code le mot "Saturne". En écrivant l'alphabet et en regardant les lettres proches, on pouvait aussi supposer que le premier mot était "Je". De là, le code découlait : La première lettre est décalée d'un rang dans l'alphabet, la deuxième de 2 rangs, ... la n-ième de n rangs...

On déchiffre alors : *Cronos (Saturne) Je dois mon nom a une antique divinité romaine. Mais quel est mon nom grec ?*

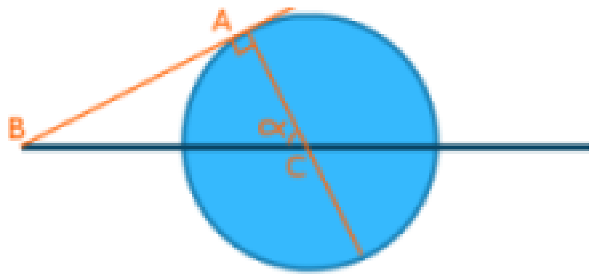
La réponse est Cronos.

Uranus - Le diamètre des anneaux

Comme Saturne, Uranus dont le diamètre mesure 50 000 kilomètres, possède des anneaux. Pourtant, vus de la surface d'Uranus, ces anneaux ne sont plus visibles au-delà de 75° de latitude : ils disparaissent sous l'horizon.

Quel est le rayon des anneaux d'Uranus ? (On donnera le résultat en milliers de kilomètres, arrondi au nombre entier le plus proche.)

Solution Traçons la figure d'Uranus et de ses anneaux vus en coupe :



Le point A est le point au dessus duquel, on ne voit plus les anneaux. L'énoncé nous dit donc que l'angle α mesure 75°. Le triangle ABC est rectangle en A, car la tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon du cerlce qui passe par le point de tangence. Donc :

$$BC = \frac{AC}{\cos(\alpha)} = \frac{25000}{\cos(75)} \approx 96593\text{km}.$$

Après approximation le résultat attendu est 97. Le rayon des anneaux d'Uranus mesure environ 97000 kilomètres.

Neptune - La conversation téléphonique

— Bonjour mon cher, ici Neptune. Je me demandais si vous accepteriez de jouer à un jeu avec moi ?

— Alors pensez à un nombre entier. Jetez un dé à 6 faces et ajoutez dix fois le résultat à votre nombre. Mettez maintenant votre résultat au carré et retranchez votre nombre de départ. Combien obtenez-vous ?

— Dans ce cas, je peux vous dire que votre nombre de départ était le ..... et que votre dé est tombé sur le ..... !

— Vous allez rire, j'obtiens l'année où Galilée découvrit vos quatre lunes principales.

— Parfaitement. Je vois qu'on ne peut rien vous cacher. Je crois que mes jeux sont trop simples pour vous, à l'avenir j'essaierai de vous en poser de plus coriaces.

— À bientôt.

Quels sont les nombres remplacés par les pointillés ?

Solution

L'énoncé de cette énigme tel qu'il est n'est pas complet. Pour pouvoir le résoudre, il fallait aller voir Jupiter où l'on trouvait les répliques manquantes du dialogue.

Attention : cet énoncé était incorrect, il semble d'après le dialogue que la solution était unique. Pourtant, nous allons voir qu'il y avait deux réponses possibles.

Notons n le nombre auquel Jupiter a pensé et d le résultat de son dé. Alors après les calculs, il obtient le nombre $(10d+n)^2 - n$. Ce nombre est égal à l'année de découverte de Neptune, c'est à dire 1846. Si n est plus grand que 110, $(10d+n)^2$ sera plus grand que 2500 et même en enlevant n on ne pourra obtenir 1846. Ainsi, $(10d+n)^2$ est un carré qui se trouve à moins de 110 de 1846. Il n'y en a trois : $42^2 = 1764$, $43^2 = 1849$ et $44^2 = 1936$.

Dans le premier cas, $1764 - n = 1846$ on trouve donc $n = -82$. Puis, comme $(10d+n)^2 = 42^2$ on a $10d + n = \pm 42$ et donc $10d = 124$ ou $10d = 40$. La première possibilité n'est pas multiple de 10, ce n'est donc pas une solution en revanche, on peut avoir $d = 4$. Nous avons donc une première solution : $n = -82$ et $d = 4$.

Dans le deuxième cas, $1849-n = 1846$ on trouve donc $n = 3$. Puis, comme $(10d+n)^2 = 43^4$ on a $10d + n = \pm 43$. Comme $10d$ doit être positif, on a $10d + n = 40$ et on conclut que $d = 4$ et $n = 3$ ce qui donne une deuxième solution.

Dans le troisième cas, $1936 - n = 1846$ on trouve donc $n = 90$. Puis, comme $10d+n = \pm 44$ dans les deux cas, $10d$ est négatif, ce qui n'est pas possible.

Cérès - Fibons et Naccis

Les Fibons et les Naccis sont des animaux curieux. Un Fibon vit deux ans et juste avant de mourir donne naissance à deux petits : un Fibon et un Nacci. Un Nacci, lui, ne vit qu'un an et à la fin de sa vie donne également naissance à un Fibon et un Nacci. Si on dépose sur Cérès un Fibon et un Nacci venant tout juste de naître, combien d'animaux y aura-t-il sur cette planète naine dix ans et demi plus tard ?

Solution

Notons $F(k)$ le nombre de descendants d'un Fibon après k années et $N(k)$ le nombre de descendants d'un Nacci après k années. Le nombre que nous cherchons est donc $F(10) + N(10)$ (la demi-année supplémentaire ne sert à rien puisque ces animaux ne se multiplient qu'aux années entières. Cette demi-année ne sert en réalité qu'à préciser que l'on veut le nombre d'animaux 10 ans plus tard *après la reproduction*.)

Un Fibon donne naissance après 1 an à un Fibon et un Nacci. Sa descendence k ans plus tard est donc égale à la descendence de ces deux fils $k-1$ ans après leur naissance :

$$F(k) = F(k-1) + N(k-1)$$

Un Nacci donne naissance après 2 ans à un Fibon et un Nacci. Sa descendence k ans plus tard est donc égale à la descendence de ces deux fils $k-2$ ans après leur naissance :

$$N(k) = F(k-2) + N(k-2)$$

En additionnant ces deux égalités on obtient :

$$F(k) + N(k) = (F(k-1) + N(k-1)) + (F(k-2) + N(k-2)).$$

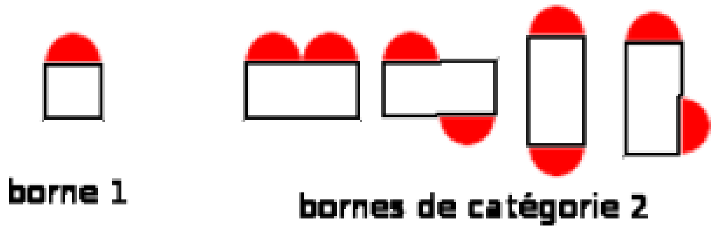
La suite $F(k) + N(k)$ est donc la célèbre suite de Fibonacci dans laquelle chaque nombre est la somme des deux nombres précédents. En réalité il s'agit de la suite de Fibonacci décalée puisque celle ci commence par un 1 alors qu'ici, $F(0) + N(0) = 2$ (il y a 1 Fibon et 1 Nacci au départ.) La suite est donc

2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377,...

Le nombre d'animaux après 10 ans est le 11ème terme (le premier terme est le nombre après 0 ans, le second après 1 an...). La réponse est 233.

Pluton - Les bornes

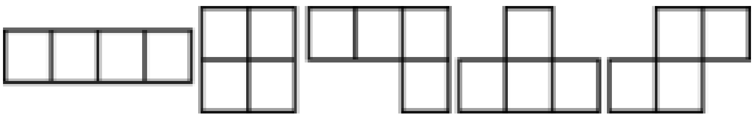
Dans la galaxie du Polymin, les habitants ont colonisé plusieurs étoiles qu'ils ont balisées à l'aide de bornes spatiales. Leur étoile-capitale est indiquée par la borne n°1. Viennent ensuite quatre étoiles de catégorie 2, chacune indiquée par l'une des quatre balises formées en assemblant deux bornes de la forme de l'étoile-capitale. Les étoiles de catégorie n sont balisées par des bornes obtenues en assemblant n bornes de catégorie 1. Deux bornes sont identiques si elles peuvent être superposées après rotation et/ou retournement.



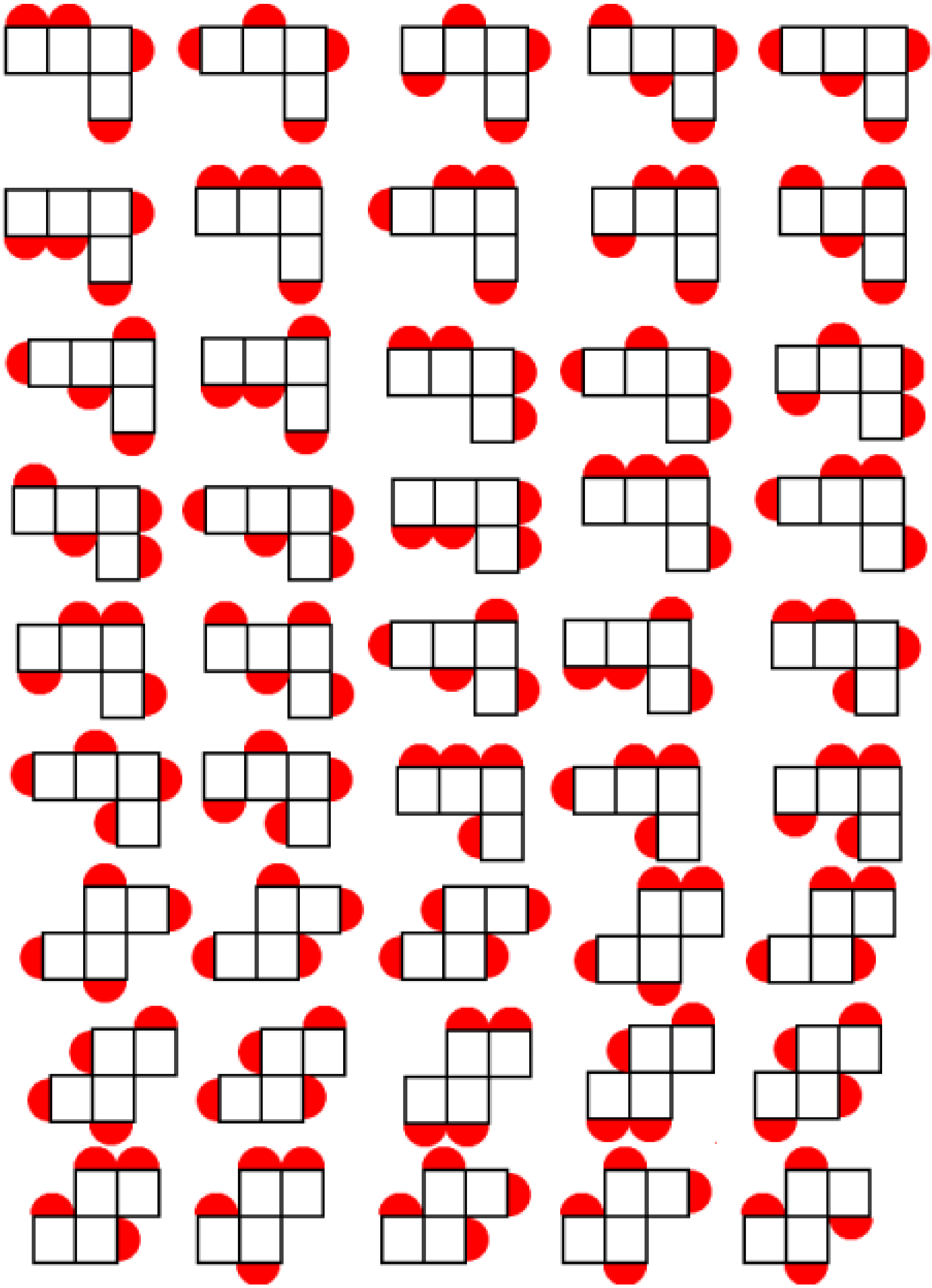
Combien la galaxie du Polymin compte-t-elle d'étoiles de catégorie 4 ?

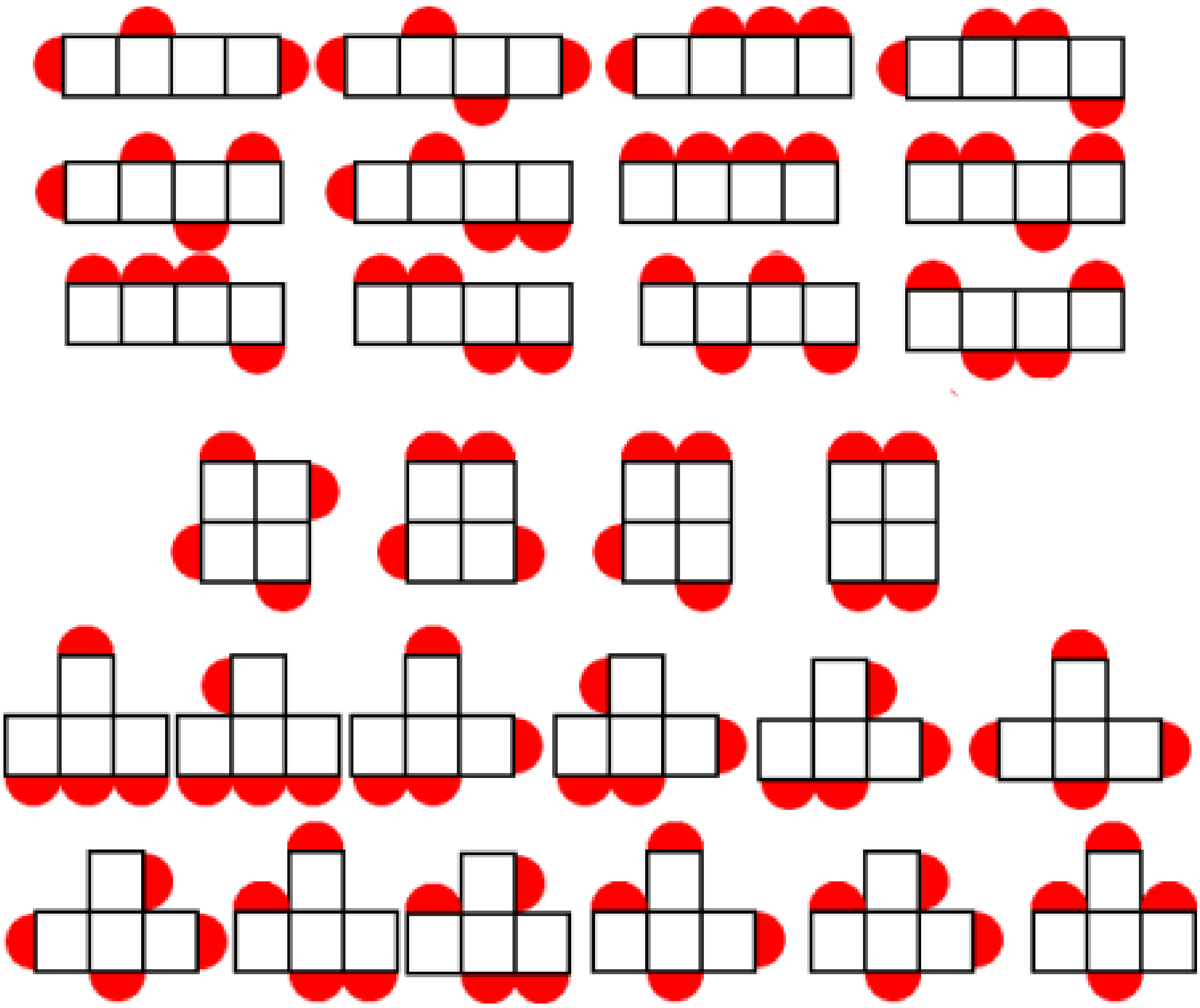
Solution

Les quatre carrés qui composent la borne peuvent être disposés selon 5 formes différentes :



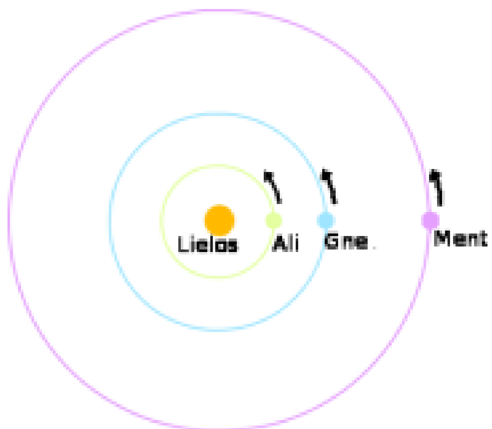
Ensuite, il n'y a pas de solution miracle, il s'agit de compter toutes les possibilités sans en oublier. Il y a 73 possibilités.





Charon - Les trois planètes

Autour de l'étoile Lielos tournent trois planètes : Ali, Gne et Ment. Ali se trouve à 1 u.a. (unité astronomique) de Lielos et en fait un tour complet en 1000 jours. Gne se trouve à 2 u.a. de Lielos et en fait un tour complet en 2000 jours. Ment se trouve à 4 u.a. de Lielos et fait un tour complet en 4000 jours. Leurs trajectoires sont circulaires.



Ce jour, les trois planètes sont alignées entre elles et alignées avec Lielos comme indiqué sur la figure.

Dans combien de temps les trois planètes seront-elles alignées la prochaine fois ? (Arrondissez éventuellement le résultat au jour le plus proche.)

Solution

Attention au piège de l'énoncé. On demande à ce que les trois planètes soient alignées, mais il n'est pas précisé que l'étoile Lielos soit elle aussi dans cet alignement.

Plaçons nous dans un repère orthonormé dont l'origine O se situe en l'étoile Lielos et dont l'axe des abscisse est donné par l'alignement des 3 planètes au début du premier jour. Notons A, G et M nos trois planètes alors leurs positions au temps t sont données par les vecteurs :

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t/1000) \\ \sin(2\pi t/1000) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} 2\cos(2\pi t/2000) \\ 2\sin(2\pi t/2000) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 4\cos(2\pi t/4000) \\ 4\sin(2\pi t/4000) \end{pmatrix}$$

On a donc

$$\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t/1000) - 2\cos(2\pi t/2000) \\ \sin(2\pi t/1000) - 2\sin(2\pi t/2000) \end{pmatrix}$$

et

$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t/1000) - 4\cos(2\pi t/4000) \\ \sin(2\pi t/1000) - 4\sin(2\pi t/4000) \end{pmatrix}$$

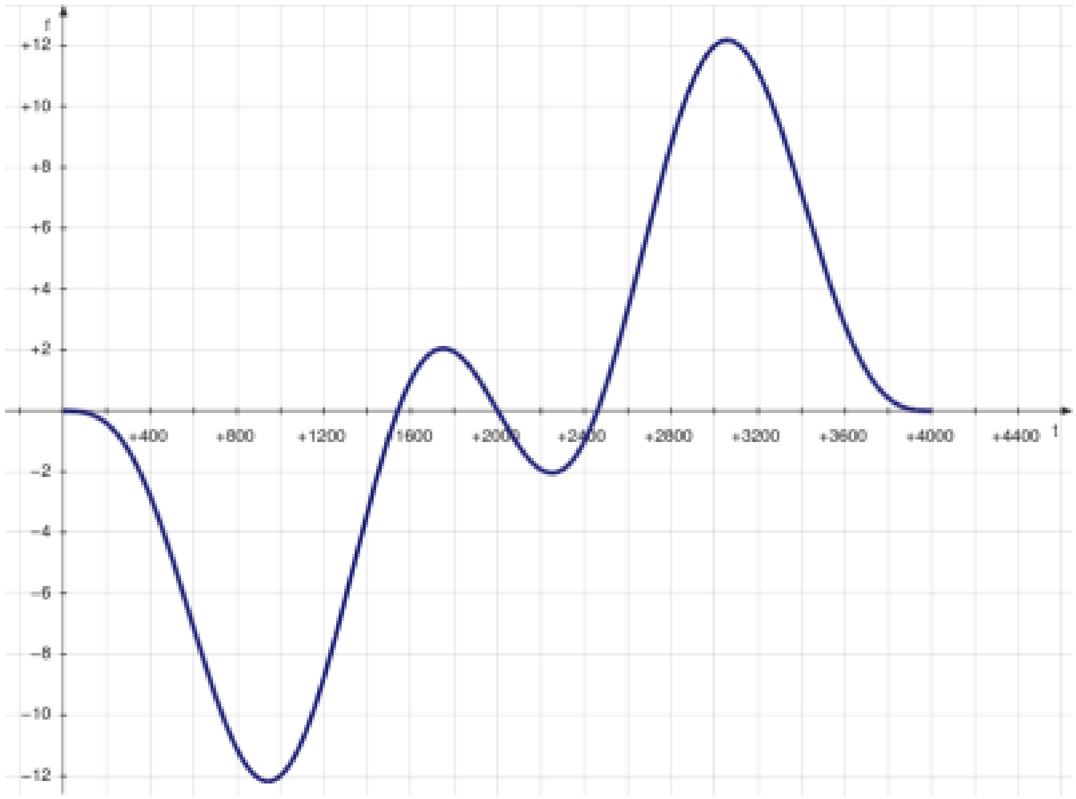
Les trois planètes sont alignées si ces deux vecteurs sont colinéaires, autrement dit, si le déterminant

$$\begin{vmatrix} \cos(2\pi t/1000) - 2\cos(2\pi t/2000) & \cos(2\pi t/1000) - 4\cos(2\pi t/4000) \\ \sin(2\pi t/1000) - 2\sin(2\pi t/2000) & \sin(2\pi t/1000) - 4\sin(2\pi t/4000) \end{vmatrix}$$

est nul. Posons donc

$$\begin{aligned} f(t) &= [\cos(2\pi t/1000) - 2\cos(2\pi t/2000)][\sin(2\pi t/1000) - 4\sin(2\pi t/4000)] \\ &\quad -[\sin(2\pi t/1000) - 2\sin(2\pi t/2000)][\cos(2\pi t/1000) - 4\cos(2\pi t/4000)] \end{aligned}$$

Voici le graphe de cette fonction :



Les planètes sont alignées quand cette fonction s'annule. Elle s'annule pour la première fois pour $t \approx 1539,9$. Le résultat arrondi demandé est donc 1540 jours.

Hauméa - L'ellipsoïde

Contrairement aux autres planètes et planètes naines qui sont quasiment sphériques, Hauméa a une forme ovale. On l'assimilera a un ellipsoïde dont les trois axes principaux mesurent 1960 km, 1518 km et 996 km.

Si on coupe Hauméa en deux morceaux de sorte que la section soit un cercle, quelle est la surface de cette section au maximum ? (Arrondissez au km^2 le plus proche.)

Solution

Quand on coupe un ellipsoïde par un plan, la section est toujours une ellipse. Le grand axe de cette ellipse est plus petit ou égal au grand axe de l'ellipsoïde tandis que le petit axe de cette ellipse est plus petit ou égal à l'axe moyen de l'ellipsoïde. Ainsi, si la section est un cercle, son diamètre ne peut pas être supérieur à l'axe moyen.

Montrons maintenant qu'il existe bien une section circulaire d'un ellipsoïde dont le diamètre est égal à l'axe moyen. Prenons un plan qui passe par l'axe moyen et faisons le pivoter autour de cet axe. L'ellipse qui résulte de la section de ce plan a un axe fixe égal à l'axe moyen, et un axe qui varie quand le plan pivote. Cet axe qui varie est égal au petit axe quand le petit axe de l'ellipsoïde se trouve dans le plan, et est égal au grand axe quand ce grand axe se trouve dans le plan. Entre les deux, il existe donc une position du plan pour laquelle l'axe qui varie est égal à l'axe moyen. Dans cette position, la section est donc un cercle dont le diamètre est l'axe moyen.

La surface demandée est donc égale à $\pi \times (1518/2)^2 \approx 1809811, 8....$ L'approximation demandée est 1809812 km^2.

Éris - Les cijimiens

La civilisation cijimienne a colonisé les nombreuses planètes qui tournent autour de l'étoile MA-TH. Sur l'orbite la plus proche de l'étoile, tourne une planète sur laquelle habitent 2 cijimiens. Sur la deuxième orbite, tournent 2 planètes habitées chacune par 3 cijimiens. Il y 4 cijimiens sur chacune des 3 planètes de la troisième orbite. Et ainsi de suite : la n-ème orbite est occupée par n planètes abritant chacune n+1 cijimiens. Il y a au total 2009 orbites autour de cette planète.

Combien la civilisation cijimienne compte-t-elle d'habitants ?

Solution Nous cherchons la valeur du nombre

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + ... + 2009 \times 2010.$$

Il est possible de montrer par récurrence que

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + ... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

C'est vrai pour $n = 1$: $1 \times 2 = (1 \times 2 \times 3)/3$. Et si c'est vrai pour n alors c'est vrai pour $n + 1$:

$$\begin{aligned} 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + ... + (n+1)(n+2) &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\ &= (n+1)(n+2)(1 + \frac{n}{3}) \\ &= (n+1)(n+2)\frac{n+3}{3}) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}. \end{aligned}$$

Par conséquent la réponse est égale à $(2010 \times 2011 \times 2012)/3 = 2706866330$.

Makemake - Les anagrammes

On dit qu'un mot est bondissant si ses lettres successives alternent les voyelles et les consonnes et si leurs rangs dans l'alphabet montent et descendent alternativement. Par exemple, MAKEMAKE est bondissant car il alterne voyelles et consonnes et dans l'alphabet : M est après A qui est avant K qui est après E qui est avant M qui est après A qui est avant K qui est après E.

Combien Makemake possède-t-il d'anagrammes bondissants ? (Une anagramme d'un mot est un mot composé des mêmes lettres mais pas forcément dans le même ordre.)

Solution

La première remarque à se faire c'est que les deux voyelles A et E sont avant les deux consonnes M et K dans l'alphabet. Ainsi, tout anagramme de Makemake qui alterne les voyelles et les consonnes est bondissant.

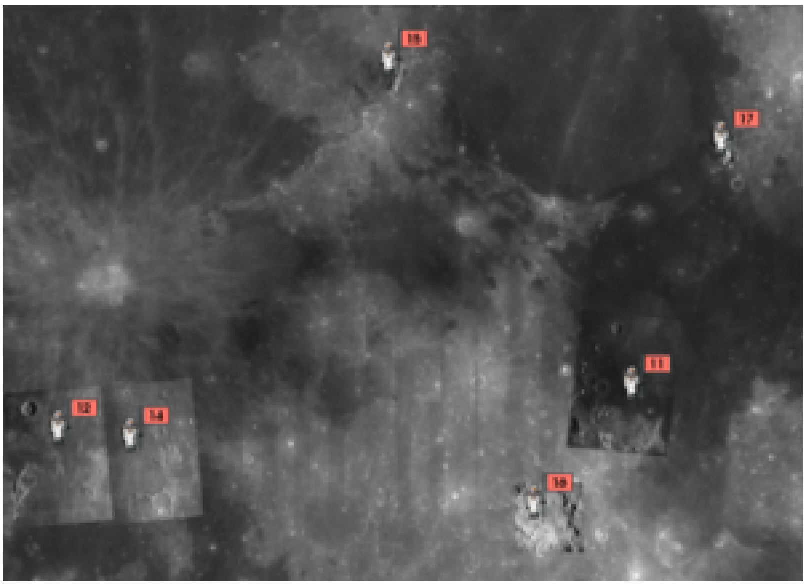
Comptons d'abord le nombre d'anagrammes qui commencent par une consonne. Ainsi les consonnes seront en position 1, 3, 5 et 7 tandis que les voyelles seront en position 2, 4, 6 et 8. Le nombre de façon de placer les quatre consonnes est égal au nombre de façon de placer les deux M dans les quatre positions possibles (et les deux K prendront automatiquement les deux places restantes) soit le nombre de combinaisons de 2 parmi 4 qui est égal à 6. Pour les mêmes raisons, le nombre de façon de placer les voyelles est aussi égal à 6.

Ainsi, il y a $6 \times 6 = 36$ anagrammes bondissants de Makemake qui commencent par une consonne. Par le même raisonnement, il y en a autant qui commencent par une voyelle.

Ainsi, Makemake possède $36 + 36 = 72$ anagrammes bondissants.

La lune - Les missions Apollo

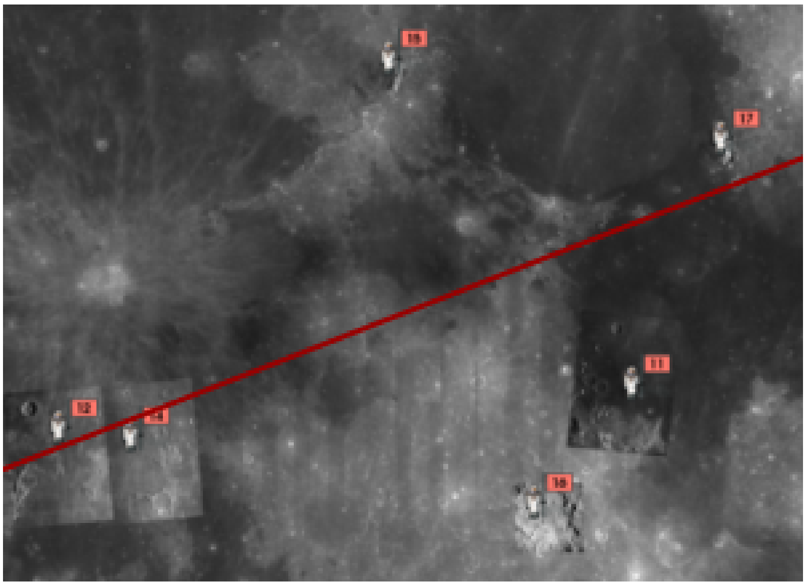
La figure indique la position sur la Lune des différentes missions Apollo (d'Apollo 11 à Apollo 17, sauf la 13 qui ne s'est jamais posée) :



Tracez une ligne sur la figure de telle façon que de chaque côté de la ligne, il y ait :
- 3 missions ;
- au moins une mission de numéro pair ;
- au moins une mission dont le numéro est un nombre premier.

Solution

Il suffisait que la ligne passe entre le 12 et le 14 et entre le 17 et le 11 :



Les lunes de Mars (Phobos et Déimos) - La balance martienne

On a posé sur Mars une gigantesque balance dont l'un des plateaux se situe au-dessus de Déimos ayant une masse de 2,2 Tt (Teratonne = Mille milliards de tonnes) et l'autre au-dessus de Phobos ayant une masse de 10,7 Tt.

Comment répartir des poids de 1, 2, 4, 8, 16, 32 et 66 kg sur les deux plateaux de cette balance de façon à ce qu'elle soit à l'équilibre ?

Solution

La somme des poids à placer est $1+2+4+8+16+32+66 = 129$ kg. Notons x la somme des poids que l'on place au dessus de Déimos. Dans ce cas, le reste, c'est à dire $129 - x$ est placé au dessus de Phobos.

La loi de la gravitation universelle énonce que la force gravitationelle entre deux objets est proportionnelle au produit de leurs masses. L'équation qu'il faut résoudre est donc :

$$2,2x = 10,7 \times (129 - x)$$

Ce qui se résout de la façon suivante :

$$2,2x = 10,7 \times 129 - 10,7x$$

$$2,2x + 10,7x = 10,7 \times 129$$
$$12,9x = 10,7 \times 129$$
$$x = 10,7 \times 129/12,9$$
$$x = 107$$

Par conséquent, il faut placer 107 kg au dessus de Déimos et $129 - 107 = 22$ kg au dessus de Phobos. Il n'y a qu'une répartition des poids permettant ceci :

- Déimos : 1, 8, 32, 66 kg.
- Phobos : 2, 4 et 16 kg.

Les lunes de Jupiter - L'absent

Ganymède, Acrostiche, Lysithéa, Io, Léda, Élara, Europe.

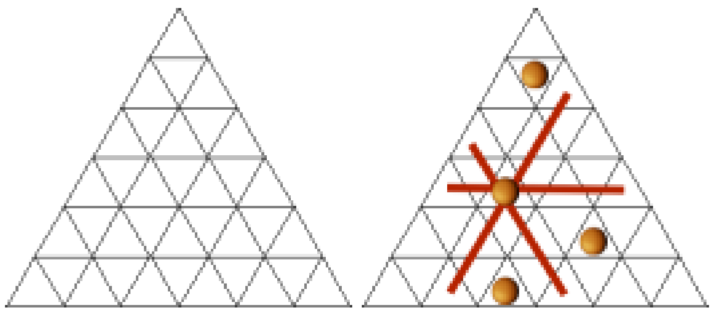
Solution

Tous les mots de la listes sont des satellites de Jupiter sauf un : Acrostiche. Un acrostriche est une phrase ou une suite de mots dont les initiales mises les unes à la suite forment un autre mot ou une autre phrase. Ici, les initiales des sept mots forment le nom : GALILÉE.

Galilée fut en 1610 le premier à découvrir que Jupiter possédait des lunes. Les quatre qu'il observa portent le nom de lunes galiléennes et sont : Io, Ganymède, Europe et Callisto.

Seul Callisto n'est pas dans la liste des sept. Le titre de l'énigme indique que l'on cherche l'absent. La réponse est Callisto.

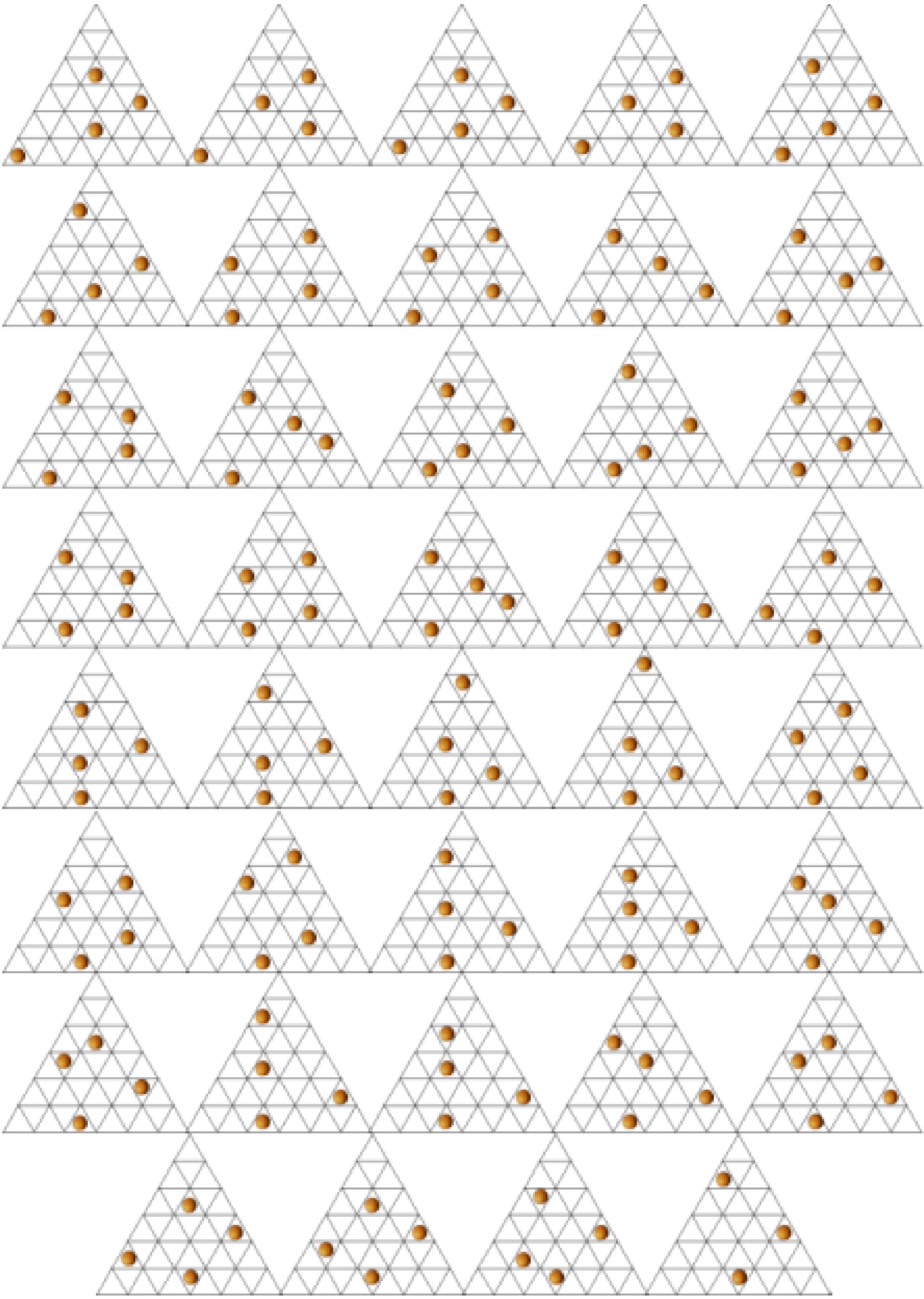
Les lunes de Saturne - Les quatre pions



De combien de façons différentes peut-on placer quatre pions sur le plateau ci-dessus de telle façon que deux d'entre eux ne soient jamais sur une même ligne ? (Comme l'indique la figure, les lignes ont trois directions possibles.)

Solution

Les quatres pions ne peuvent pas tenir sur un triangle de côté 5. Donc il y a forcément un pion sur la ligne du bas. Les possibilités sont classées sur la page suivante selon la position du pion de la ligne du bas. Il faut compter ces 39 solutions, plus leurs symétries verticales. Au total, il y a $39 + 39 = 78$ solutions.



Les lunes d'Uranus - Titania, Obéron

Vous nous rencontrerez, Titania, Obéron,
Par le hasard du songe d'une nuit d'été
Et le poète anglais qui nous donna nos noms
Saurez-vous, voyageurs ! saurez-vous le nommer ?

Solution

Un grand nombre des satellites d'Uranus ont été nommés d'après des personnages de l'œuvre de William Shakespeare. Titania et Obéron en particulier ont été tirés du *Songe d'une nuit d'été*.

La réponse est Shakespeare.

Les lunes de Neptune - Le Pairball

Chaque année neptunienne, les Tritoniens et les Néréides se retrouvent sur Neptune pour une partie de Pairball (le football local). Dans ce jeu, s'affrontent deux équipes de 5 joueurs. Chaque joueur porte un maillot avec son numéro qui est un nombre à quatre chiffres. Trouvez la règle de numérotation des maillots pour placer les dix joueurs dans leur équipe.

Solution

Cette énigme était une énigme interactive. L'ordinateur proposait des nombres à quatre chiffres et le joueur devait à chaque fois dire si ce numéro était celui d'un joueur tritonien ou néréide. Il fallait ne pas se tromper dix fois de suite pour réussir l'énigme. Chaque erreur faisait repartir de zéro.

À force d'essais, il fallait remarquer qu'un joueur était tritonien si la somme des chiffres de son maillot était paire et néréide si cette somme était impaire.

La Ceinture d'Astéroïdes - La fable de l'espace

Le cosmo-lièvre et l'astro-tortue font la course dans l'espace. Le départ est donné sur Mars et l'arrivée se situe sur Jupiter ; la distance est de 3,7 unités astronomiques. Dans l'espace vide, le véhicule spatial du cosmo-lièvre va cinq fois plus vite que celui de l'astro-tortue. Seulement entre Mars et Jupiter, les deux adversaires doivent traverser la ceinture d'astéroïdes. Dans cette zone, le véhicule du cosmo-lièvre va dix fois moins vite que dans le vide. La cosmo-tortue, plus habile, évolue six fois plus vite que le lièvre dans cette zone.

La course se termine sur un match nul.

Quelle est la largeur de la ceinture d'astéroïdes ? Donnez le résultat en unités astronomiques.

Solution

Notons x la largeur recherchée.

Notons v la vitesse du cosmo-lièvre dans le vide. Dans ce cas, la vitesse du cosmo-lièvre dans la ceinture d'astéroïde est $v/10$. On rappelle que le temps nécessaire à parcourir une distance d à une vitesse v est d/v. Le temps que met le cosmo-lièvre pour faire le trajet est donc :

$$\frac{x}{v/10} + \frac{3,7-x}{v},$$

le premier terme étant le temps passé à traverser la ceinture d'astéroïdes et le deuxième terme le temps passé à traverser le vide.

La vitesse de l'astro-tortue dans le vide est $v/5$ et sa vitesse dans la ceinture d'astéroïdes est $6 \times v/10$. Le temps que met l'astro-tortue pour faire le trajet est donc :

$$\frac{x}{6v/10} + \frac{3,7-x}{v/5}.$$

Le fait que la course se termine par un match nul se traduit par l'équation :

$$\frac{x}{v/10} + \frac{3,7-x}{v} = \frac{x}{6v/10} + \frac{3,7-x}{v/5}$$

On peut tout multiplier par v :

$$\frac{x}{1/10} + (3,7-x) = \frac{x}{6/10} + \frac{3,7-x}{1/5}$$

Ce qui se simplifie de la façon suivante :

$$10x + 3,7 - x = \frac{10}{6}x + 5 \times (3,7-x)$$

$$10x + 3,7 - x = \frac{10}{6}x + 18,5 - 5x$$

$$10x - x - \frac{10}{6}x + 5x = 18,5 - 3,7$$

$$\frac{74}{6}x = 14,8$$

$$x = \frac{14,8 \times 6}{74} = 1,2$$

La ceinture d'astéroïdes a une largeur de 1,2 unités astronomiques.

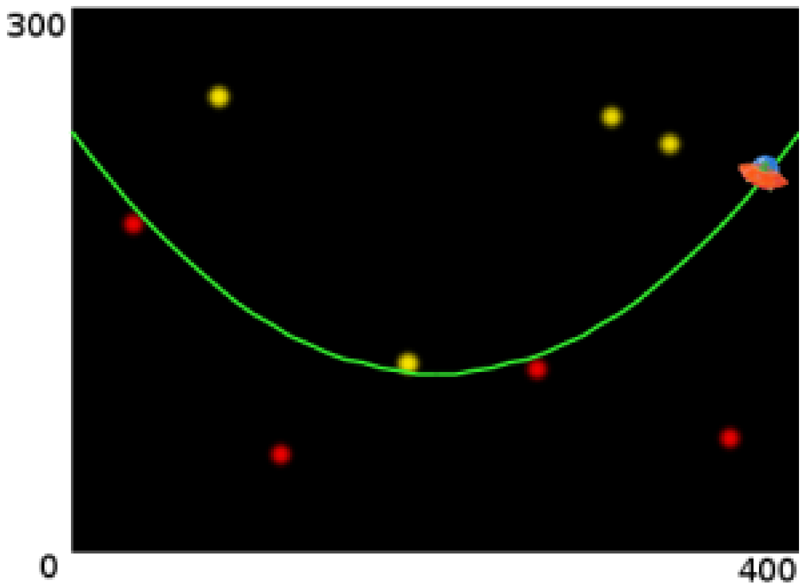
La comète de Halley -La soucoupe

Aidez la soucoupe volante à trouver son chemin à travers ce ciel étoilé en proposant une fonction $f(x)$ telle que la soucoupe passe au-dessus de toutes les étoiles rouges et en-dessous de toutes les étoiles jaunes.

Solution

Une énigme interactive qui pouvait se résoudre par essais successifs. Ici, une parabole suffisait à gagner. Par exemple :

$$f(x) = ((x - 200)(x - 200) + 1)/300 + 100$$



La comète de Hall-Bopp - Les nombres de Hall-Bopp

La comète de Hall-Bopp a une période de 2537 années. On appelle un nombre de Hall-Bopp un nombre dont tous les chiffres sont des nombres premiers différents mais qui pourtant n'est pas premier. Par exemple, 2537 est un nombre de Hall-Bopp car 2, 5, 3 et 7 sont premiers mais $2537 = 43 \times 59$.

Combien existe-t-il de nombres de Hall-Bopp ?

Solution

Il n'y a que quatre chiffres premiers : 2, 3, 5 et 7. Ainsi, un nombre de Hall-Bopp a au plus 4 chiffres.

Il n'y a évidemment pas de nombre de Hall-Bopp a 1 chiffre (il devrait être à la fois premier et non premier).

Avec les chiffres 2, 3, 5 et 7 on peut former $4 \times 3 = 12$ nombres à deux chiffres dont les deux chiffres sont différents (4 choix pour le chiffre des unités et 3 choix pour le chiffre des dizaines). La moitié d'entre-eux ont 2 ou 5 comme chiffre des unités et sont des nombres de Hall-Bopp car ils sont divisibles par 2 ou 5. Pour les six autres, il faut les vérifier un à un : seuls 27 et 57 sont de Hall-Bopp car ils sont multiples de 3. Il y a donc au total 8 nombres de Hall-Bopp à deux chiffres.

On peut former $4 \times 3 \times 2 = 24$ nombres à trois chiffres succeptibles d'être des nombres de Hall-Bopp. 12 d'entre eux en sont car ils se terminent par 2 ou 5. Pour les 12 autres, il faut les vérifier un à un. Dix sont des nombres de Hall-Bopp : 253, 273, 723, 573, 753, 237, 327, 527, 537 et 357. Il y a donc 22 nombres de Hall-Bopp à trois chiffres.

On peut former $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ nombres à quatre chiffres succeptibles d'être des nombres de Hall-Bopp. 12 d'entre eux en sont car ils se terminent par 2 ou 5. Pour les 12 autres, il faut les vérifier un à un. Quatre seulement sont des nombres de Hall-Bopp : 2573, 5723, 5327 et 2537. Il y a donc 16 nombres de Hall-Bopp à quatre chiffres.

Après addition, il y a 46 nombres de Hall-Bopp.

La Voie lactée - Les 3 étoiles

Dans la Voie lactée, l'étoile Alpha a un diamètre de 2 Gm (gigamètre = 1 million de kilomètres), l'étoile Beta un diamètre de 3 Gm et l'étoile Gamma un diamètre de 4 Gm. Ces trois étoiles possèdent l'étrange propriété suivante : vue de l'une quelconque d'entre elle, les deux autres ont le même diamètre apparent dans le ciel, ceci étant dû au fait qu'elles ne sont pas à la même distance. La distance entre les étoiles Beta et Gamma est de 1200 années-lumière.

Je me trouve dans le plan de ces trois étoiles, à l'intérieur du triangle qu'elles forment et de là où je suis, je les vois toutes les trois avec le même diamètre apparent.

À quelles distances de moi se situent les étoiles Alpha, Beta et Gamma ? (Donnez les réponses arrondies à l'année-lumière la plus proche.)

Solution

Notons respectivement A, B et C les étoiles Alpha, Beta et Gamma.

Dire que deux étoiles ont le même diamètre apparent cela signifie que le rapport de leur diamètre à leur distance est le même. Ainsi, puisque vues de B, les étoiles A et C ont le même diamètre apparent, alors :

$$\frac{\text{diam(Alpha)}}{BA} = \frac{\text{diam(Gamma)}}{BC},$$

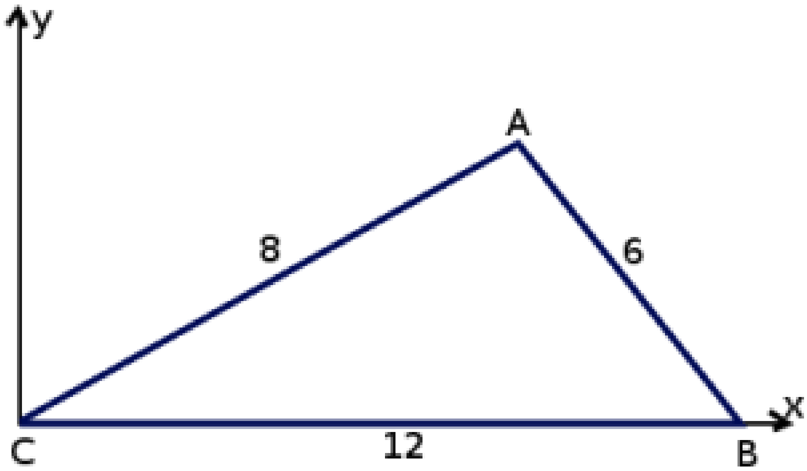
soit

$$\frac{2}{BA} = \frac{4}{1200}.$$

D'où on déduit que $AB = 600$ années-lumières. De la même façon en se plaçant en C, on obtient que $AC = 800$ années-lumière.

Remarquons qu'avec ces distances on peut constater que comme l'annonce l'énigme, vu de A aussi, les étoiles B et C ont le même diamètre apparent.

Plaçons nous dans un repère orthonormé dont l'origine est placée en C, dont l'axe des abscisses est donné par la direction CB et dont l'unité est la centaine d'années-lumière :



L'étoile C a pour coordonnées $(0, 0)$. L'étoile B a pour coordonnées $(12, 0)$. Calculons les coordonnées (x, y) de l'étoile A. L'étoile A se trouve une distance 8 du point C donc :

$$x^2 + y^2 = 8^2 = 64.$$

L'étoile A se trouve à une distance 6 du point B donc :

$$(x - 12)^2 + y^2 = 6^2 = 36.$$

Retranchons cette deuxième équation à la première pour obtenir :

$$x^2 - (x - 12)^2 = 64 - 36,$$

$$x^2 - (x^2 - 24x + 144) = 28,$$

$$24x = 28 + 144$$

$$x = \frac{43}{6}.$$

Puis en reportant ce résultat dans la première équation :

$$\left(\frac{43}{6}\right)^2 + y^2 = 64,$$

$$y^2 = 64 - \frac{43^2}{6^2} = \frac{455}{36},$$

$$y = \frac{\sqrt{455}}{6}$$

Nous avons choisi la valeur positive pour y afin d'être en accord avec le dessin, mais y aurait pu valoir -$\frac{\sqrt{455}}{6}$, l'étoile A aurait été en-dessous de l'axe des abscisse et ça n'aurait rien changé à la suite de la résolution.

L'étoile A a donc pour coordonnées $(\frac{43}{6}, \frac{\sqrt{455}}{6})$.

Notons M le point que nous cherchons, c'est-à-dire un point duquel les trois étoiles ont le même diamètre apparent. Notons (x, y) les coordonnées du point M. Du point M, les étoiles B et C ont le même diamètre apparent, ce qui s'exprime par l'équation suivante :

$$\frac{\text{diam(Gamma)}}{CM} = \frac{\text{diam(Beta)}}{BM}.$$

Soit :

$$\frac{4}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{3}{\sqrt{(x-12)^2+y^2}}.$$

Ce qui donne après mise au carré et produit en croix :

$$16(x-12)^2 + 16y^2 = 9x^2 + 9y^2.$$

$$16(x^2 - 24x + 144) + 16y^2 = 9x^2 + 9y^2.$$

$$7x^2 + 7y^2 - 384x + 2304 = 0$$

Du point M, les étoiles A et C ont le même diamètre apparent :

$$\frac{\text{diam(Alpha)}}{AM} = \frac{\text{diam(Gamma)}}{CM}.$$

$$\frac{2}{\sqrt{(x-43/6)^2 + (y-\sqrt{455}/6)^2}} = \frac{4}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Ce qui donne après mise au carré et produit en croix :

$$4(x-43/6)^2 + 4(y-\sqrt{455}/6)^2 = x^2 + y^2.$$

$$3x^2 + 3y^2 - \frac{172}{3}x - \frac{4\sqrt{455}}{3}y + 256 = 0$$

Il s'agit donc maintenant de résoudre le système :

$$\begin{cases} 7x^2 + 7y^2 - 384x + 2304 = 0 \\ 3x^2 + 3y^2 - \frac{172}{3}x - \frac{4\sqrt{455}}{3}y + 256 = 0 \end{cases}$$

Retranchons 3 fois la première à 7 fois la seconde pour obtenir :

$$\frac{2252}{3}x - \frac{28\sqrt{455}}{3}y - 5120 = 0.$$

Soit

$$y = \frac{2252x - 15360}{28\sqrt{455}}$$

Reportons ce résultat dans la première équation et simplifions pour obtenir :

$$589x^2 - 9630x + 38340 = 0.$$

Puis :

$$x = \frac{4815 \pm 21\sqrt{1365}}{589}$$

Et l'équation

$$y = \frac{2252x - 15360}{28\sqrt{455}}$$

nous donne

$$y = \frac{2252\left(\frac{4815 \pm 21\sqrt{1365}}{589}\right) - 15360}{28\sqrt{455}}.$$

Nous avons donc deux solutions. Calculons leurs valeurs approchées. La première donne un point M_1 de coordonnées $(9,49; 10,07)$ et la seconde un point M_2 de coordonnées $(6,86; 0,14)$. Nous cherchons un point situé à l'intérieur du triangle ABC, c'est donc le point M_2 qui nous intéresse.

Maintenant que nous avons les coordonnées de notre point, il est facile de calculer sa distance aux points A, B et C et on trouve :

$$AM = 3,4295$$

$$BM = 5,1442$$

$$CM = 6,8590$$

Il ne reste plus qu'à remultiplier ces distances par 100 et à arrondir pour obtenir le résultat demandé en années-lumière. L'étoile Alpha se situe à 343 années-lumière, l'étoile Beta à 514 années-lumière et l'étoile Gamma à 686 années-lumière.

La galaxie d'Andromède - La galaxie spirale

Mathias a dessiné une galaxie spirale, composée d'un carré de 1cm de côté et de 8 demi-cercles. Les quatre plus grands de ces demi-cercles ont un diamètre de 4cm.

Quelle est la surface de la galaxie ? (On donnera le résultat en mm^2 arrondi à l'unité la plus proche.)

Solution

La surface du carré est de 1cm^2.

La surface d'un bras est égale à la surface d'un demi-disque de diamètre 4 moins la surface d'un demi-disque de diamètre $4 - 1 = 3$. La surface d'un bras est donc :

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7\pi}{8}.$$

La surface totale de la galaxie est donc :

$$1 + 4 \times \frac{7\pi}{8} = 1 + \frac{7\pi}{2}$$

C'est à dire environ $11,9955$ cm^2. Le résultat en mm^2 arrondi demandé est 1200mm^2.

Nébuleuse de l'œil de chat - Nebs et Buleux

Sur cette planète sphérique, il y a deux clans qui utilisent deux systèmes de mesure différents : l'unité de mesure des Nebs est le "ben" et celle des Buleux est le "lub". Si on demande à un buleux le volume et la superficie de sa planète, il répondra deux fois le même nombre. Si on demande à un neb la superficie et la circonférence de sa planète, il répondra lui aussi deux fois le même nombre.

Combien y a-t-il de lubs dans un ben ?

Solution Notons R le rayon de la planète des Nebs et des Buleux.

Pour un buleux, le volume et la superficie de sa planète sont égale :

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi R^2.$$

On simplifie par 4, par π et par R^2 et on obtient $R/3 = 1$ donc $R = 3$ lubs.

Pour un neb, la superficie et la circonférence de sa planète sont égale :

$$4\pi R^2 = 2\pi R.$$

Soit $R = 1/2$ bens.

Ainsi, 1 ben $= 2R = 2 \times (3 \text{ lubs }) = 6$ lubs. La réponse est 6.

Nébuleuse du crabe - H et He

La masse d'une nébuleuse est composée pour un quart d'Hélium et pour les trois quarts restants d'Hydrogène.

Sur mille atomes de la nébuleuse, en moyenne combien sont des atomes d'Hélium ? (Vous arrondirez le résultat à l'unité la plus proche.)

Solution Notons N le nombre cherché et m la masse d'un atome d'hydrogène. La masse d'un atome d'Hélium est quatre fois supérieure à celle d'un atome d'hydrogène et est donc égale à $4m$. Ainsi, la masse de mille atomes de la nébuleuse est égale à :

$$N \times 4m + (1000 - N)m$$

L'énigme nous apprend que la masse des atomes d'hydrogène est trois fois plus grande que la masse des atomes d'hélium, donc :

$$\frac{(1000-N)m}{N \times 4m} = 3$$

$$\frac{(1000-N)}{N \times 4} = 3$$

$$1000 - N = 3 \times 4N$$

$$13N = 1000$$

$$N = \frac{1000}{13} \approx 76,9$$

Ainsi sur 1000 atomes de la nébuleuse en moyenne 77 (c'est à dire 1 atome sur 13) sont des atomes d'hélium et 923 (c'est à dire 12 atomes sur 13) sont des atomes d'hydrogène.

Grande Ourse - Le volume de la casserole

Voici les coordonnées dans l'espace des 4 étoiles de la Grande Ourse qui forment le récipient de la casserole.

	Ascension Droite	Déclinaison	Distance(Année-lumière)
Dubhe	11h 03m 43,7s	61° 45' 03"	124
Phecda	11h 53m 49,8s	53° 41' 41"	84
Merak	11h 01m 50,5s	56° 22' 57"	79
Megrez	12h 15m 25,6s	57° 01' 57"	81

Quel est le volume de la casserole, c'est à dire le volume du tétraèdre dont les sommets sont ces quatre points ? (Donnez le résultat arrondi à l'année-lumière cube la plus proche.)

Solution

Commençons par convertir les angles d'ascension droite et de déclisaison en degrés. Ces conversions se font par les formules suivantes :

– Ascension droite :

$$\text{Angle en degré} = \left(\frac{\text{heures}}{24} + \frac{\text{minutes}}{60 \times 24} + \frac{\text{secondes}}{3600 \times 24}\right) \times 360$$

.

– Déclinaison :

$$\text{Angle en degré} = \text{degrés} + \frac{\text{minutes}}{60} + \frac{\text{secondes}}{3600}$$

.

Voici le tableau converti :

	Ascension Droite	Déclinaison	Distance(Année-lumière)
Dubhe	165,932°	61,7508°	124
Phecda	178,4575	53,6947	84
Merak	165,4604	56,3825	79
Megrez	183,8567	57,0325	81

Convertissons maintenant ces coordonnées angulaires en coordonnées cartésiennes à l'aide des formules suivantes :

$$\begin{cases} x = (\text{distance}) \times \cos(\text{déclinaison}) \cos(\text{Ascension droite}) \\ y = (\text{distance}) \times \cos(\text{déclinaison}) \sin(\text{Ascension droite}) \\ z = (\text{distance}) \times \sin(\text{déclinaison}) \end{cases}$$

Et nous obtenons :

	x	y	z
Dubhe	-56,9298	14,2659	109,2313
Phecda	-49,7173	1,3388	67,6933
Merak	-42,3372	10,9803	65,7874
Megrez	-43,9774	-2,9646	67,9573

Plaçons maintenant l'origine de notre repère en l'étoile Dubhe et calculons les coordonnées des trois autres étoiles :

	x	y	z
Phecda	7,2125	-12,9271	-41,5379
Merak	14,5925	-3,2855	-43,4438
Megrez	12,9524	-17,2305	-41,2739

Le volume du parallélépipède basé sur ces trois vecteurs est égal au déterminant de cette matrice 3×3. Le volume du tétraèdre est égal à sa base multipliée par sa hauteur et divisée par 3. La hauteur du tétraèdre est égale à celle du parallélépipède et sa base est égale à la base du parallélépipède divsée par 2. Ainsi le volume du tétraèdre est égal au volume du parallélépipède divisé par 6 :

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 7,2125 & -12,9271 & -41,5379 \\ 14,5925 & -3,2855 & -43,4438 \\ 12,9524 & -17,2305 & -41,2739 \end{vmatrix}$$

On obtient alors :

$$V \approx \frac{3743,8145}{6} \approx 623,9691$$

Le volume de la casserole est de 624 années-lumière cube.

Étoile Polaire - Faites-le vous-même

Il paraît qu'ici, on choisit soi-même son score...

Explications : Cette énigme demandait en fait une chaîne de caractère composée de a, de b, de c et de d. Par exemple : aadbadcbaacbd. Pour chaque chaîne proposée par le joueur, l'ordinateur calculait son score. Il fallait donc essayer de comprendre comment se faisait le calcul du score à partir de la chaîne pour proposer une chaîne faisant le plus de points possibles.

Solution

Le principe qu'il fallait découvrir est que chaque caractère faisait une addition sans retenue dans une certaine base. Plus précisément :

– a ajoutait 1000 en base 2 sans retenue.
– b ajoutait 100 en base 3 sans retenue.
– c ajoutait 10 en base 4 sans retenue.
– d ajoutait 1 en base 5 sans retenue.

Une fois l'addition faite, le nombre était reconverti en base 10 pour donner le score. Prenons un exemple pour bien comprendre. Calculons le résultat de la chaine acc.

– Premier caractère, le a : on effectue l'addition 0+1000 en base 2, on obtient 1000, c'est à dire 8.
– Second caractère, le c : 8 en base 4 s'écrit 20. 0n effectue l'addition 20+10, on obtient 30, c'est à dire 12.
– Troisième caractère, le c : 12 en base 4 s'écrie 30. On effectue l'addition 30+10=0, en effet, 1+3 devrait donner 0 avec une retenue de 1, mais on oublie les retenues, on ne reporte pas le 1 au rang suivant. Nous voilà donc revenu à 0.

Ainsi la chaîne ac rapportera 12 points mais la chaîne acc n'en rapportera aucun.

Avec ce procédé, il n'est pas possible d'obtenir des nombres aussi grands que souhaité. Le maximum est 2159.